Test und Verlässlichkeit Aufgaben für die grosse Übung

Prof. G. Kemnitz

13. Januar 2025

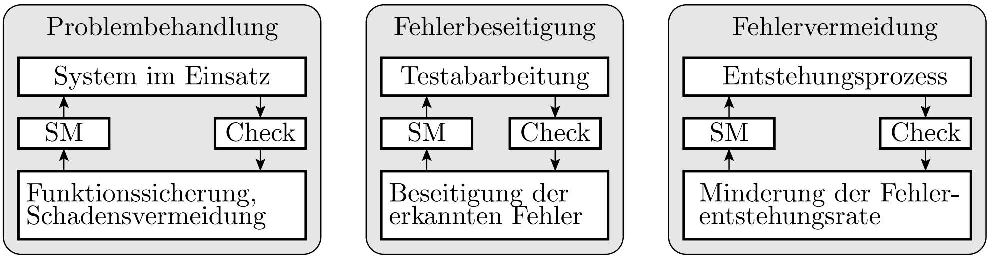
Inhaltsverzeichnis

1 Kenngrößen, MF-Handling

1.1 Modellbildung

Aufgabe 1.1: Verlässlichkeit, Service-Modell

a) *Auf welchen drei Ebenen erfolgt die Sicherung der Verlässlichkeit?*



Check Durchfühung von Kontrollen SM Erfolgskontrolle

- Überwachung und »Entschärfen« erkannter Probleme (Fehlfunktionen, Abstürze) während der Nutzung.
- Fehlerbeseitigung vor der Nutzung und in Nutzungspausen. Fehler definieren wir in Abgrenzung von Störungen als die beseitigbaren Ursachen von Fehlfunktionen und Abstürzen.
- Fehlervermeidung durch verbesserte Entstehungsprozesse. Iteration aus Überwachung von Zuständen, Zwischen- und Endergebnissen und Beseitigung erkannter Probleme.

b) *Was ist eine Fehlerkultur? Was für eine Fehlerkultur unterstellt die Vorlesung und warum?*

Fehlerkultur ist die Art und Weise, wie eine Kultur mit Fehlern und deren Folgen umgeht.

Idealisierte Fehlerkultur in der Vorlesung: Für alle erkannten Probleme laufen solange Beseitigungsversuche, bis sie nicht mehr erkennbar sind.

Wir betrachten oft nur den Endzustand nach Beseitigung aller erkennbaren Probleme, teilweise auch den Weg dahin und ignorieren

- Probleme, die bei vernünftigem Umgang nicht da sind,
- Kosten für die Beseitigung, Wirtschaftlichkeit,
- kulturelle Barrieren und Gepflogenheiten, ...

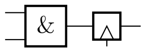
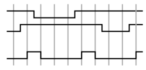
Erheblich einfacherere Modellierung als mit »Kulturfaktoren«.

c) *Ein Modell in der Informatik hebt die wesentlichen Aspekte hervor und vernachlässigt unwesentliche Details. Was sind wesentliche Aspekte und was sind vernachlässigte unwesentliche Details das Service-Modells?*

Wesentlich: Abzählbare Anzahl der Service-Anforderungen (SR), erbrachten Leistungen (DS), nicht erbrachten Leistungen (NS), korrekten Leistungen (CS) und Fehlfunktionen (MF).
Vernachlässigte Details: Funktion, Realisierung.

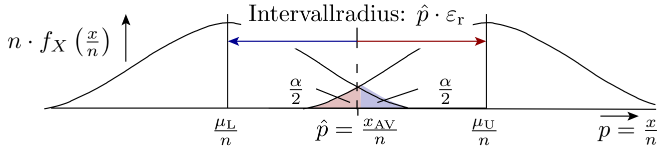
Das erlaubt, die positiven und negativen Ergebnisse zu zählen und Raten für deren Häufigkeit zu definieren und damit die einzelnen Teilaspekte der Verlässlichkeit (Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit, ...) und die Wirksamkeit verlässlichkeitssichernder Massnahmen (Tests, Problembeseitigung, ...) quantitativ zu beschreiben.

d) *Auf was für Systemtypen ist das Service-Modell anwendbar?*

getaktete Digitalschaltung		E: A: 
Programm mit EVA-Struktur	`uint8_t up(uint8_t a){ return 23 * a; }`	E: 10 101 ... A: 320 19 ...
Server	E: z.B. eine Datenbankanfrage A: Ergebnisdatensatz	
Fertigungsprozess	E: Fertigungsauftrag, Material, ... A: gefertigtes Produkt	
Entwurfsprozess	E: Entwurfsauftrag A: Entwurf	

Anwendbar auf alle Systeme, die auf Anforderung aus Eingaben Ausgaben erzeugen: Hardware, Software, Mechatronische Systeme, Entwurfsprozesse, Fertigungsprozesse incl. der für die Hardware, ...

e) *Was hat es mit der Kennzeichnung »ACR« auf sich?*



ACR: Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgröße (Useful estimates only with appropriate counting ranges).

Unsere Kenngrößen für Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit, Testgüte, Problembeseitigungserfolg, ... ergeben sich alle aus Zählwerten für zufällige Ereignisse (Ergebnis erbracht, richtig, falsch, ...).

Die beste Vorhersage der künftigen Häufigkeit zufälliger Ereignisse ist der Erwartungswert. Eine brauchbare Abschätzung von Erwartungswerten verlangt ausreichend große Zählwerte. Wie groß, behandelt erst Foliensatz 4.

E, A Eingabe, Ausgabe.

1.2 Verfügbarkeit

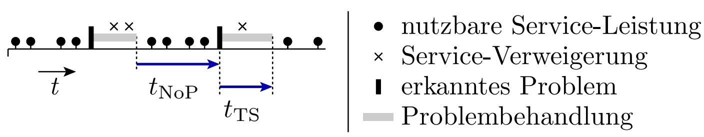
Aufgabe 1.2: Verfügbarkeit, Problembehandlungsdauer

Eine Steuerung mit einer mittleren Zeit *zwischen* den Fehlfunktionen von zwei Jahren soll eine Verfügbarkeit von $1-10^{-6}$ haben. In 99% der Fälle startet das System ohne Reparatur und Korrektur automatisch neu und ist nach $t_{TS1}=30\,\mathrm{s}$ wieder betriebsbereit und in 1% der Fälle muss zusätzlich die Steuerung getauscht werden. Andere Aspekte der Nichtverfügbarkeit bleiben unbeachtet.

$\bar{t}_{NoP}=2\,\text{Jahre}$, $A\geq 1-10^{-6}$, für 99% der MF automatische Fehlfunktionsbehandlung mit $t_{TS1}=30\,\mathrm{s}$, 1% der MF durch Ausfall, Reparaturdauer t_{TS2}.

a) *Wie viel Zeit steht im Mittel für Problembehandlung zu Verfügung?*

$$A=\frac{\bar{t}_{NoP}}{\bar{t}_{NoP}+\bar{t}_{TS}} \tag{1.2}$$



$$\bar{t}_{TS}=\frac{\bar{t}_{NoP}}{A}-\bar{t}_{NoP}=\bar{t}_{NoP}\cdot\left(\frac{1-A}{A}\right)$$
$$=2\,\text{Jahre}\cdot 10^{-6}=31{,}54\,\mathrm{s}$$

b) *Wie groß darf die mittlere Zeit $\bar{t}_{\mathrm{TS2}}$ für den Tausch der Steuerung betragen?*

$$\bar{t}_{\mathrm{TS}} = 99\% \cdot t_{\mathrm{TS1}} + 1\% \cdot \bar{t}_{\mathrm{TS2}}$$
$$\bar{t}_{\mathrm{TS2}} = \frac{\bar{t}_{\mathrm{TS}} - 99\% \cdot t_{\mathrm{TS1}}}{1\%} = 100 \cdot (31{,}54\,\mathrm{s} - 99\% \cdot 30\,\mathrm{s}) = 164\,\mathrm{s}$$

Der Tausch einer Steuerung innerhalb von im Mittel 2,5 min verlangt eine Ersatzsteuerung vor Ort, die automatisch und ohne manuelle Unterstützung die Aufgaben der ausgefallenen Steuerung übernimmt.

c) *Wiederholen Sie die Abschätzung für eine geforderte Verfügbarkeit von nur $A = 1 - 10^{-5}$?*

$$A = \frac{\bar{t}_{\mathrm{NoP}}}{\bar{t}_{\mathrm{NoP}} + \bar{t}_{\mathrm{TS}}} \qquad (1.2)$$

$$\bar{t}_{\mathrm{TS}} = \bar{t}_{\mathrm{NoP}} \cdot \left(\frac{1-A}{A}\right) = 315{,}4\,\mathrm{s}$$

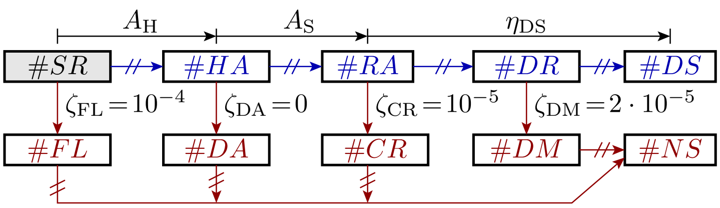
Zehnfacher Wert gegenüber Aufgabenteil a.

$$\bar{t}_{\mathrm{TS2}} = \frac{\bar{t}_{\mathrm{TS}} - 99\% \cdot t_{\mathrm{TS1}}}{1\%} = 100 \cdot (315{,}4\,\mathrm{s} - 99\% \cdot 30\,\mathrm{s}) \approx 8\,\mathrm{Stunden}$$

Ein Tausch in 8 Stunden verlangt, dass 7 Tage pro Woche für 24 Stunden Reparaturpersonal bereit steht und die Ersatzsteuerung schnell beschaffbar ist.

$\bar{t}_{\mathrm{NoP}}$	Mittlere problemfreie Zeit.
t_{TS}, $\bar{t}_{\mathrm{TS}}$	Zeit und mittlere Zeit für die Problembehebung (troubleshooting).
A	Verfügbarkeit (Availability).

Aufgabe 1.3: Verfügbarkeit, CVA-Graph



a) *Wie heißen die Zählwerte und Problemraten?*

$\#\langle evt\rangle$	Anzahl der Zählereignisse, $evt \in \{SR, HA, \ldots\ldots\}$.
SR, HA	Service-Anforderung, Hardware verfügbar.
RA, DR	Service-Anforderung akzeptiert, erbrachtes Ergebnis.
DS, NS	Erbrachte Service-Leistung, keine Service-Leistung.
FL, DA	Nichtverfügbarkeit wegen Hardware-Ausfall bzw. Annahmeverweigerung.
CR, DM	Nichtverfügbarkeit wegen Absturz bzw. erkannter Fehlfunktion.
ζ_{FL}, ζ_{DA}	HW-Nichtverfügbarkeitsrate, Service-Verweigerungsrate.
ζ_{CR}, ζ_{DM}	Absturzrate, Rate der erkannten Fehlfunktionen.

b) *Wie groß sind die einzelnen Teilverfügbarkeiten?*

(1.3) $$A_{\mathrm{H}} = (1 - \zeta_{\mathrm{FL}}) + \zeta_{\mathrm{FL}} \cdot \nu_{\mathrm{FL}}$$

(1.4) $$A_{\mathrm{S}} = (1 - \zeta_{\mathrm{DA}}) + \zeta_{\mathrm{DA}} \cdot \nu_{\mathrm{DA}}$$

$$A_{\mathrm{H}} = (1 - \zeta_{\mathrm{FL}}) + \zeta_{\mathrm{FL}} \cdot 0 = 1 - 10^{-4} \left[\tfrac{\mathrm{HA}}{\mathrm{SR}}\right]$$
$$A_{\mathrm{S}} = (1 - 0) + 0 \cdot \ldots = 1 \left[\tfrac{\mathrm{RA}}{\mathrm{HA}}\right]$$
$$\eta_{\mathrm{DS}} = \left.\tfrac{\#DS}{\#RA}\right|_{\mathrm{ACR}} = (1 - \zeta_{\mathrm{CR}}) \cdot (1 - \zeta_{\mathrm{DM}}) = 1 - 3 \cdot 10^{-5} \left[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{RA}}\right]$$

c) *Wie groß ist die Verfügbarkeit insgesamt?*

(1.5) $$A = A_{\mathrm{H}} \cdot A_{\mathrm{S}} \cdot \eta_{\mathrm{DS}}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - 10^{-4}\right) \left[\tfrac{\mathrm{HA}}{\mathrm{SR}}\right] \cdot 1 \left[\tfrac{\mathrm{RA}}{\mathrm{HA}}\right] \cdot \left(1 - 3 \cdot 10^{-5}\right) \left[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{RA}}\right] \\ &= 1 - \left(10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}\right) \left[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SR}}\right] \end{aligned}$$

A_{H} Hardware-Verfügbarkeit.
A_{S} Service-Verfügbarkeit.
η_{DS} Rate der erbrachen Service-Leistungen.

1.3 Zuverlässigkeit

Aufgabe 1.4: Transistorausfall

Durch den Ausfall eines Transistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von $\zeta_1 = 10^{-5} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ auf $\zeta_2 = 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$.

a) *Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

Vor dem Ausfall:

$$R_1 = \frac{1}{10^{-5} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^5 \left[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Nach dem Ausfall:

$$R_2 = \frac{1}{10^{-4} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^4 \left[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

b) *Welche MF-Rate verursacht der ausgefallene Transistor?*

(1.11) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \sum_{i=1}^{\#MFC} \zeta_{[\mathrm{MT}].i}$$

MF-Rate des ausgefallenen Transistors:

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \zeta_1 + \zeta_{\mathrm{Tr}} \\ \zeta_{\mathrm{Tr}} &= \zeta_2 - \zeta_1 \\ &= 10^{-4} \left[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] - 10^{-5} \left[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] = 9 \cdot 10^{-5} \left[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] \end{aligned}$$

ζ Fehlfunktionsrate.

$[\frac{MF}{DS}]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
R	Zuverlässigkeit (Reliability).
$[\frac{DS}{MF}]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
ζ	Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).
$\#MFC$	Anzahl MF-Klassen, hier MF durch ausgefallenen Transistor und sonstige MF.
ζ_i	MF-Rate der MF-Klasse i (MF rate of MF class i).
ζ_{Tr}	Fehlfunktionsrate verursacht durch den ausgefallenen Transistor.

Aufgabe 1.5: Zuverlässigkeit Gesamtsystem

Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Fest-platte	Stromver-sorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	R_{R}	R_{Disc}	R_{Power}	R_{others}
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

Die Anzahl zeitgleicher MF durch mehrere Teilsysteme und die Anzahl der MF eines Teilsystems ohne Gesamt-MF seien vernachlässigbar.

a) *Welche Zuverlässigkeit hat das Gesamtsystem?*

(1.12) $$\frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \sum_{i=1}^{\#MFC} \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}].i}}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{700} + \frac{1}{2000}} = 203\,[\tfrac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}]$$

b) *Welche MF-Rate hat das Gesamtsystem?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

$$\zeta = \frac{1}{203\,[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}]} = 4{,}93 \cdot 10^{-3}\,[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}]$$

$[\frac{DS}{MF}]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

R	Gesamtzuverlässigkeit (Total reliability).
$\#MFC$	Anzahl der MF-Klassen (Number of malfunction classes).
R_i	Teilzuverlässigkeit (partitial reliability) von MF-Klasse i.

ζ	Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).
$[\frac{MF}{DS}]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

1.4 Sicherheit

Aufgabe 1.6: Betriebssicherheit

Bei einem IT-System mit einer mittleren Zeit bis zur nächsten nicht erkannten Fehlfunktionen von 10^3 Stunden gefährdet im Mittel jede hundertste Fehlfunktion die Betriebssicherheit. Mittlere Service-Dauer 1 h, Systemauslastung 100%. Sicherheitgefährdungen durch erkennbare Probleme (Ausfälle, Annahmeverweigerung, Absturz und erkannte MF vernachlässigbar.

$\bar{t}_{\mathrm{NDM}} = 10^3\,\mathrm{h},\ \rho = 10^{-2}\,\left[\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{NDM}}\right],\ \bar{t}_{\mathrm{S}} = 1\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SU}} = 1,\ \zeta_{\mathrm{S.OP}} = \zeta_{\mathrm{S.FL}} = 0$

a) *Zuverlässigkeit und Sicherheit?*

(1.10) $$R_{[\mathrm{MT}]} = \frac{\eta_{\mathrm{SU}}\cdot\bar{t}_{\mathrm{NDN}}}{\bar{t}_{\mathrm{S}}}$$

(1.24) $$S = \frac{R_{\mathrm{MT}}}{\rho}$$

$$R = \frac{10^3\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}} = 10^3\,\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$
$$S = \frac{R}{\rho} = 10^5\,\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$$

b) *Um welchen Faktor ν muss eine Sicherheitseinheit mit $R_{\mathrm{SU}} = 5.000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ den Anteil der sicherheitskritischen Fehlfunktionen mindestens reduzieren, zur Erhöhung der Sicherheit auf $S_{\mathrm{SU}} = 10^6\,\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$?*

(1.25) $$S_{\mathrm{SU}} = \frac{1}{(\zeta+\zeta_{\mathrm{SU}})\cdot\rho\cdot\nu}$$

$$\boxed{\#DS} \xrightarrow{\zeta+\zeta_{\mathrm{SU}}} \boxed{\#MF} \xrightarrow{\rho\cdot\nu} \boxed{\#SP_{\mathrm{MF}}}$$

$$\nu \le \frac{1}{S_{\mathrm{SU}}\cdot\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_{\mathrm{SU}}}\right)\cdot\rho} = \frac{1}{10^6\cdot\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{5\cdot 10^3}\right)\cdot 1\%} = \frac{1}{12}$$

Die Sicherheitseinheit muss bewirken, dass im Mittel von zuvor 12 nur noch ein Problem sicherheitskritisch bleibt.

$\bar{t}_{\mathrm{NDM}}$, $\bar{t}_{\mathrm{S}}$	Mittlere Service-Zeit je nicht erkannte Fehlfunktion, mittlere Service-Dauer.
η_{SU}	Systemauslastungsrate.
$R_{[\mathrm{MT}]}$	Zuverlässigkeit mit bzw. ohne Fehlfunktionsbehandlung.
ζ	Fehlfunktionsrate.
R	Zuverlässigkeit (Reliability).
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$	Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.

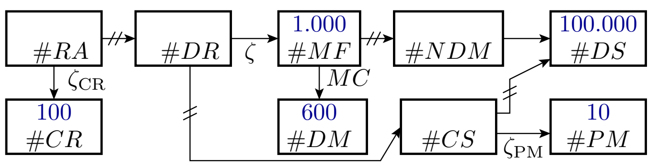
1.5 Überwachung

Aufgabe 1.7: Überwachung

Bei 10^5 erbrachten Service-Leitungen sind 10^3 Fehlfunktionen und 100 Abstürze aufgetreten. Von den Fehlfunktionen hat die Kontrolle 600 erkannt hat. Von den korrekte Service-Leistungen hat die Kontrolle 10 als Fehlfunktionen ausgewiesen.

$\#DS = 10^5,\ \#MF = 10^3,\ \#CR = 10^2,\ \#DM = 600,\ \#PM = 10$

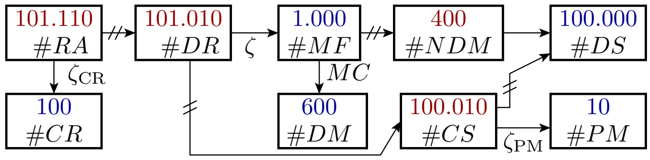
a) *Tragen Sie die gegebenen Zählwerte in einen angepassten CVA-Graphen ein mit zusätzlichen Zählfeldern für akzeptierte Anforderungen (RA), erbrachte Ergebnisse (DR), korrekte Ergebnisse (CR) und nicht erkannte Fehlfunktionen (NDM) ein.*



b) *Wie groß sind Fehlfunktionsabdeckung und Phantomfehlfunktionsrate der Überwachung?*

(1.26) $$MC = \left.\frac{\#DM}{\#MF}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

(1.27) $$\zeta_{\mathrm{PM}} = \left.\frac{\#PM}{\#CS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

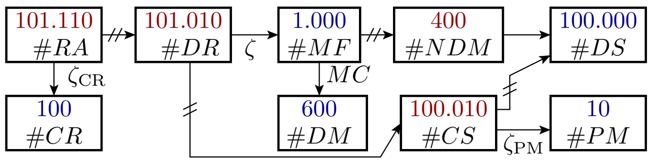


$$MC = \frac{600\,[\mathrm{DM}]}{1000\,[\mathrm{MF}]} = 60\%$$

$$\zeta_{\mathrm{PM}} = \left.\frac{\#PM}{\#CS}\right|_{\mathrm{ACR}} = \frac{10\,[\mathrm{PM}]}{100.010} = 10^{-4}\left[\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{DS}}\right]$$

c) *Wie groß sind Zuverlässigkeit und Erbringungsrate?*

(1.8) $$R_{[\mathrm{MT}]} = \left.\frac{\#DS}{\#NDM}\right|_{\mathrm{ACR}}$$



$$\eta_{\mathrm{DS}} = \left.\frac{\#DS}{\#RA}\right|_{\mathrm{ACR}} = \frac{100.000}{101.110} = 98{,}9\%$$

$$R_{\mathrm{MT}} = \left.\frac{\#DS}{\#NDM}\right|_{\mathrm{ACR}} = \frac{100.000}{400} = 250$$

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$\#DM$	Anzahl der erkannten Fehlfunktionen (Number of detected MFs).
$\#PM$	Anzahl der Phantom-MF, d.h. der korrekten DS, die als MF klassifiziert werden.
$\#CR$	Zählwert der Abstürze.
MC, ζ_{PM}	Fehlfunktionsabdeckung, Phantomfehlfunktionsrate.
ζ_{CR}, ζ	Absturzrate, Fehlfunktionsrate.
η_{DS}	Rate der erbrachen Service-Leistungen.
R_{MT}	Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung.
ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

1.6 Abbruch

Aufgabe 1.8: Sicherer Zustand, Abbruch

Bei einem IT-System mit einer mittleren Nutzungsdauer zwischen zwei MF von 2500 Stunden, einer mittleren Service-Dauer von einer Stunde, Systemauslastung 40% gefährde abschätzungsweise jede hundertste MF die Betriebssicherheit. Um die Betriebssicherheit auf $10^6\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$ zu erhöhen, soll das System um eine MF-Behandlung erweitert werden, die es bei Erkennen einer Fehlfunktion in einen sicheren Zustand überführt.

$\bar{t}_{\mathrm{NDM}} = 2.500\,\mathrm{h}$, $\bar{t}_{\mathrm{S}} = 1\,\mathrm{h}$, $\eta_{\mathrm{SU}} = 40\%$, $\rho = 1\%$, $S = 10^6\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$

a) *Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn beim Überführen in den sicheren Zustand keine Fehlfunktionen auftreten?*

(1.10) $$R_{[\mathrm{MT}]} = \frac{\eta_{\mathrm{SU}} \cdot \bar{t}_{\mathrm{NDN}}}{t_{\mathrm{S}}}$$

Sicherheitskritische Probleme nur durch nicht erkannte Fehlfunktionen:

$$S = \frac{1}{\rho \cdot \zeta \cdot (1 - MC)} = \frac{R}{\rho \cdot (1 - MC)}$$
$$R = \frac{40\% \cdot 2.500\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}} = 1000$$
$$MC = 1 - \frac{R}{\rho \cdot S} = 1 - \frac{1000}{1\% \cdot 10^6} = 90\%$$

b) *Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn im Mittel jeder 20te Versuch, einen sicheren Zustand herzustellen, scheitert?*

Potentielle sicherheitskritische Probleme zusätzlich für jede zwanzigste, d.h. 5% der erkannten Fehlfunktionen:

$$S = \frac{1}{\rho \cdot (\zeta \cdot (1 - MC) + 5\% \cdot \zeta \cdot MC)} = \frac{R}{\rho \cdot ((1 - MC) + 5\% \cdot MC)}$$
$$MC = \frac{1 - \frac{R}{\rho \cdot S}}{95\%} = \frac{90\%}{95\%} = 94{,}7\%$$

Überschlag zur Kontrolle: Statt 1 von 10 darf etwa nur 1 von 20 Fehlfunktionen unerkannt bleiben.

c) *In welchem mittleren zeitlichen Abstand wird ein sicherer Zustand hergestellt, ohne dass die Betriebssicherheit gefährdet ist?*

Ein sicherer Zustand wird für 95% der erkannten Fehlfunktionen, d.h. für

$$MC \cdot 95\% = 90\%$$

aller Fehlfunktionen hergestellt. Mittlerer Zeitabstand:

$$\bar{t}_{\mathrm{NDM}}/90\% = 2778\,\mathrm{h}$$

In 99% der Fälle ist die Fehlfunktion nicht sicherheitskritisch. Mittlere Zeit zwischen dem Herstellen eines sicheren Zustands ohne Gefährdung der Betriebssicherheit:

$$2778\,\mathrm{h}/99\% = 2800\,\mathrm{h}$$

$\bar{t}_{\mathrm{NDM}}$, $\bar{t}_{\mathrm{S}}$	Mittlere Service-Zeit je nicht erkannte Fehlfunktion, mittlere Service-Dauer.
η_{SU}, S	Systemauslastungsrate, Sicherheit.
ρ	Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SP}}\right]$	Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.
R	Zuverlässigkeit (Reliability).
MC	Fehlfunktionsabdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.

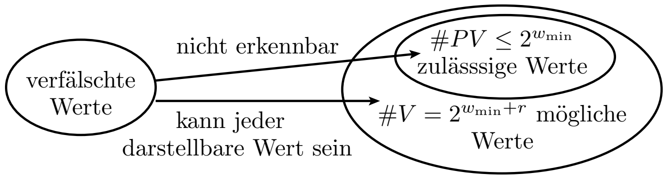
1.7 Wiederholung

Aufgabe 1.9: Übertragung mit Wiederholung nach MF

Datenübertragung mit Fehlfunktionsrate $10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ und 8 redundanten Bits je Datensatz. Verfälschung werden gleichhäufig auf alle darstellbaren Werte verteilt und Erkennung aller unzulässigen Werte. Max. eine Wiederholung nach erkannten Problemen. MF-Usache zu 100% Störungen. Ausfälle sollen nicht betrachtet werden.

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $r = 8$, $\eta_{\mathrm{Div}} = 1$, $\zeta_{\mathrm{PM}} = \zeta_{\mathrm{CR}} = 0$.

a) *Fehlfunktionsabdeckung?*



(1.35) $$\mu_{\mathrm{MC}} \geq 1 - 2^{-r}$$

$$MC = 1 - 2^{-8} = 99{,}61\%$$

b) *Zuverlässigkeit ohne und mit Fehlfunktionsbehandlung?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

(1.36) $$R_{\mathrm{MT}} = 2^r \cdot R$$

$$R = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{10^{-6}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^6 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

$$R_{\mathrm{MT}} = 2^8 \cdot 10^6 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] = 2{,}56 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

c) *Erbringungsrate ohne und mit max. einer Wiederholanforderung bei Empfang einer erkannten verfälschten Nachricht?*

(1.28) $$\eta_{\mathrm{DS}} = (1 - \zeta_{\mathrm{CR}}) \cdot (1 - \zeta_{\mathrm{SMF}}) \quad \text{mit } \zeta_{\mathrm{SMF}} = \zeta_{\mathrm{PM}} + \zeta \cdot MC - \zeta \cdot \zeta_{\mathrm{PM}}$$

(1.41) $$\eta_{\mathrm{DS.SR}} = \eta_{\mathrm{DS}} \cdot (1 + (1 - \eta_{\mathrm{DS}}) \cdot \eta_{\mathrm{Div}})$$

Erbringungsrate ohne Wiederholanforderung:

$$\eta_{\mathrm{DS}} = 1 - \zeta \cdot MC = 1 - 10^6 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] \cdot \left(1 - 2^{-8}\right) = 1 - 10^6 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Erbringungsrate bei max. einer Wiederholanforderung:

$$\eta_{\mathrm{DS.SR}} = \left(1 - 10^6\right) \cdot \left(1 + 10^6\right) = 1 - 10^{12}$$

d) *Erforderliche Anzahl der redundanten Datenbits zur Erhöhung der Zuverlässigkeit auf* 10^{10} *übertragene Datensätze je nicht erkannte Datenverfälschung?*

(1.36) $$R_{\mathrm{MT}} = 2^r \cdot R$$

$$r = -\log_2\left(\frac{R_{\mathrm{MT}}}{R}\right) = -\log_2\left(\frac{10^{10}}{10^6}\right) \geq 13{,}3$$

Mindestens $r = 14$ redundante Bits.

$\zeta_{\mathrm{CR}}, \zeta$	Absturzrate, Fehlfunktionsrate.
r	Anzahl der redundanten Bits.
η_{Div}	Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechnung.
ζ_{PM}	Phantom-Fehlfunktionsrate.
$\#VP, \#PP$	Anzahl der gültigen Bitmuster, Anzahl der darstellbaren Bitmuster.
MC, r	Fehlfunktionsabdeckung, Anzahl der redundanten Bits.
$w_{\min}$	Erforderliche Bitanzahl zu Unterscheidung aller zulässigen Werte.

$R_{[\mathrm{MT}]}$	Zuverlässigkeit mit bzw. ohne Fehlfunktionsbehandlung.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
η_{DS}	Rate der erbrachen Service-Leistungen.
$\eta_{\mathrm{DS.SR}}$	Erbringungsrate bei max. einer Wiederholung nach Nichterbringung.

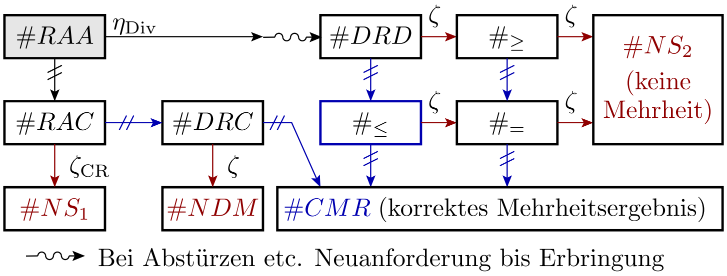
1.8 Mehrheitsentsch.

Aufgabe 1.10: Mehrheitsentscheid

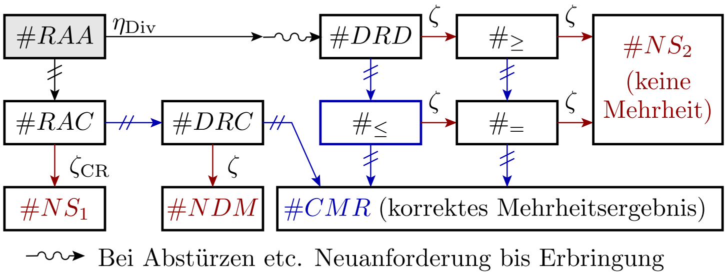
Alle drei Einzelsysteme haben die übereinstimmende Absturzrate $\zeta_{\mathrm{CR}} = 10^{-5}$ und MF-Raten $\zeta = 10^{-4}$. 75% der Fehlfunktionen entstehen durch Störungen und sind diversitär. Die restlich 25% der Fehlfunktionen werden durch Fehler verursacht und sind nur zu 60% diversitär. Nicht erbrachte Leistungen sind mit 5% und nicht erkannten Fehlfunktionen mit 1% sicherheitsgefährdent.

$\zeta_{\mathrm{CR}} = 10^{-5} \left[\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}\right], \zeta = 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right], \eta_{\mathrm{Div}} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%, \rho_{\mathrm{CR}} = 5\%, \rho = 1\%$

a) *Wiederholung des CVA-Graphen aus der Vorlesung?*



b) *Erbringungsrate?*

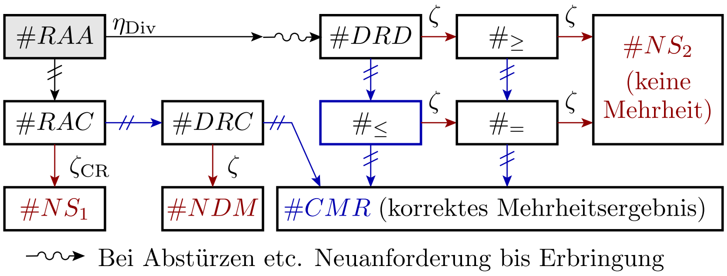


$$\eta_{\mathrm{DS}} = 1 - \eta_{\mathrm{Div}} \cdot \left(3 \cdot \zeta^2 - 2 \cdot \zeta^3\right) + (1 - \eta_{\mathrm{Div}}) \cdot \zeta_{\mathrm{CR}} \quad (1.44)$$

$$\eta_{\mathrm{Div}} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\% = 90{,}6\%$$

$$\eta_{\mathrm{DS}} = 1 - (1 - 90{,}6\%) \cdot 10^{-5} = 1 - 9{,}4 \cdot 10^{-7}$$

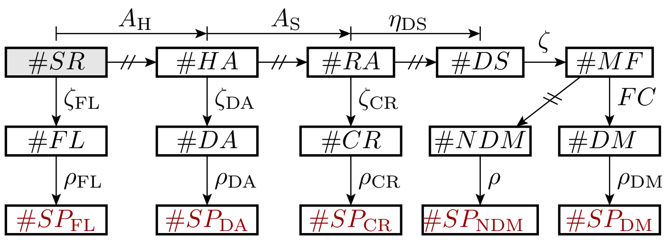
c) *Zuverlässigkeit?*



$$R_{\mathrm{MV}} = \frac{\eta_{\mathrm{DS}}}{\eta_{\mathrm{NDM}}} = \frac{1 - \eta_{\mathrm{Div}} \cdot \left(3 \cdot \zeta^2 - 2 \cdot \zeta^3\right) + (1 - \eta_{\mathrm{Div}}) \cdot \zeta_{\mathrm{CR}}}{(1 - \eta_{\mathrm{Div}}) \cdot (1 - \zeta_{\mathrm{CR}}) \cdot \zeta} \quad (1.45)$$

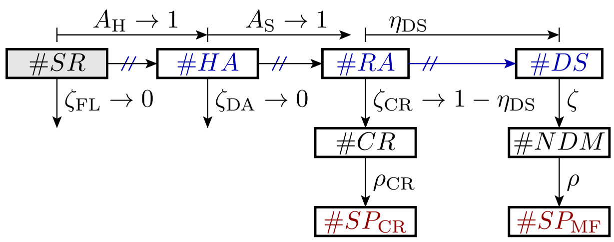
$$R_{\mathrm{MV}} = \frac{1 - (1 - 90{,}6\%) \cdot 10^{-5}}{(1 - 90{,}6\%) \cdot (1 - 10^{-5}) \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{(1 - 90{,}6\%) \cdot 10^{-4}} = 1{,}06 \cdot 10^5 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{NDM}}\right]$$

d) *Sicherheit?*



Für A_H, $A_S$und η_{DS} nahe eins:

$$\zeta_S = \zeta_{FL} \cdot \rho_{FL} + \zeta_{DA} \cdot \rho_{DA} + \zeta_{CR} \cdot \rho_{CR} + \zeta \cdot (FC \cdot \rho_{DM} + (1 - FC) \cdot \rho) \tag{1.23}$$



Mehrheitsentscheid

- Versagen durch Abstürze $\eta_{CR} \to 1 - \eta_{DS}$
- nicht erkannte und korrigierte Fehlfunktionen: $\zeta \to \frac{1}{R_{MT}}$

$$\zeta_S = (1 - \eta_{DS}) \cdot \rho_{CR} + \eta_{DS} \cdot \frac{1}{R_{MT}} \cdot \rho$$
$$= 9{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 5\% + \frac{1 - 9{,}4 \cdot 10^{-7}}{1{,}06 \cdot 10^{5}} \cdot 1\% = 1{,}4 \cdot 10^{7}$$

η_{DS}	Rate der erbrachen Service-Leistungen.
η_{Div}	Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechnung.
ζ_{CR}, ζ	Absturzrate, Fehlfunktionsrate.
ρ	Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen.
ρ, ν	Anteil sicherheitsritischer Probeme an den nicht diversitären Abstürzen.
RAA	Alle drei Service-Anforderungen akzeptiert.
RAC	Alle drei Anforderungen akzeptiert, mögliche Probleme haben gemeinsame Ursache.
RAD	Alle drei Anforderungen akzeptiert, mögliche Probleme haben diversitäre Ursachen.
DRC	Alle drei Ergebnis erbracht, mögliche Fehlfunktionen haben gemeinsame Ursache.
DRD	Alle drei Ergebnis erbracht, mögliche Fehlfunktionen haben diversitäre Ursachen.
NDM, NS	Nicht erkannte Fehlfunktion, keine Service-Leistung.
$\#_{\geq}$, $\#_{\leq}$, $\#_{=}$	Mindestens, maximal bzw. genau eine Fehlfunktion bei zwei Berechnungen.
η_{DS}	Rate der erbrachen Service-Leistungen.
R_{MV}	Zuverlässigkeit Gesamtsystem mit Mehrheitsentscheid.
SR, FL	Service-Anforderung, Hardware ausgefallen.
HA, DA	Harware verfügbar, Annahme verweigert.
RA, CR	Anforderung akzeptiert, Absturz.
DS, MF	Erbrachte Leistung, Fehlfunktion.

2 Fehler

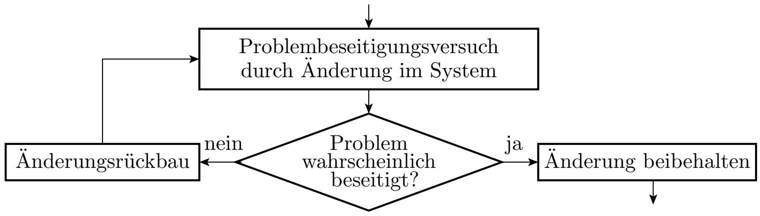
2.1 Fehlerbeseitigung

Aufgabe 2.1: Fehler und Störungen

a) *Warum ist es viel einfacher, Fehlfunktionen durch Störungen zu korrigieren als solche, die durch Fehler verursacht werden?*

Störungen wirken diversitär. Eine erkannte Fehlfunktion durch eine Störung lässt sich in der Regel durch eine Wiederholanforderung der Service-Leistung mit gleichen Eingaben korrigieren. Bei Fehlern ist man bestrebt, Systeme so zu bauen, dass bei Wiederholung genau dasselbe Problem wieder sichbar wird. Problemumgehung verlangt »Andersartigkeit« der Neuberechung. Aufwändig und oft unwirksam.

b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*



Zielgerichtete Problembeseitigung ist nur in dem Maße möglich, wie der Beseitigungserfolg kontrollierbar ist. Denn Fehlklassifizierung bewirken, dass erfolgreich beseitigte Probleme zurückgebaut bzw. eingebaute neue Fehler nicht durch Rückbau beseitigt werden. Mit zunehmender Fehlklassifierungshäufigkeit bildet sich ein Gleichgewicht zwischen Problembeseitigung und die Schaffung neuer Probleme.

Für Fehler liefert der Test idealerweise eine korrekte ja/nein-Aussage, d.h. alle erkennbaren Fehler werden beseitigt. Bei störungsminderenden Maßnahmen muss man zum einen die Fehlfunktionsrate über Stunden und Tage bestimmen und die aus den so bestimmten Zählwerten ableitbaren Verbesserungs-/Verschlechterungs-Aussagen sind mit Irrtumswahrscheinlichkeiten behaftet, die Rückbau/Beibehaltungsentscheidungen zur Folge haben.

2.2 Test

Aufgabe 2.2: Vollständiger Test

Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

a) *Test mit allen Eingabewerten.*

Mit $w = 40\,\text{Bit}$ sind 2^{40} Eingabewerte darstellbar. Erforderliche Testzeit für das Ausprobieren aller Eingabne:

$$t_{\text{test}} \geq 2^{40} \cdot 100\,\text{ns} = 30{,}5\,\text{h}$$

b) *Test mit allen 3-Pattern-Tests mit einer 1-0-1 Folge an einem und konstanten Werten an den 39 anderen Eingabebits.*

Für alle 40 Eingänge 2^{39} 3-Pattern-Tests:

$$\begin{aligned} t_{\text{T}} &\geq 3 \cdot w \cdot 2^{w-1} \cdot 100\,\text{ns} \\ &= 3 \cdot 40 \cdot 2^{39} \cdot 100\,\text{ns} = 76\,\text{Tage} \end{aligned}$$

c) *Test mit allen Eingabeänderungen.*

Anzahl der möglichen Eingabeänderungen:

$$2^w \cdot (2^w - 1)$$

Bei geschickter Reihung ist die zweite Eingabe jedes Eingabepaars der erste Wert des Folgeeingabepaars:

$$t_\mathrm{T} \geq 2^w \cdot (2^w - 1) \cdot 100\,\mathrm{ns}$$
$$\approx 2^{80} \cdot 100\,\mathrm{ns} \approx 38 \cdot 10^9\ \mathrm{Jahre}$$

Geschätzte Zeit seit dem Urknall $14 \cdot 10^9$ Jahre.

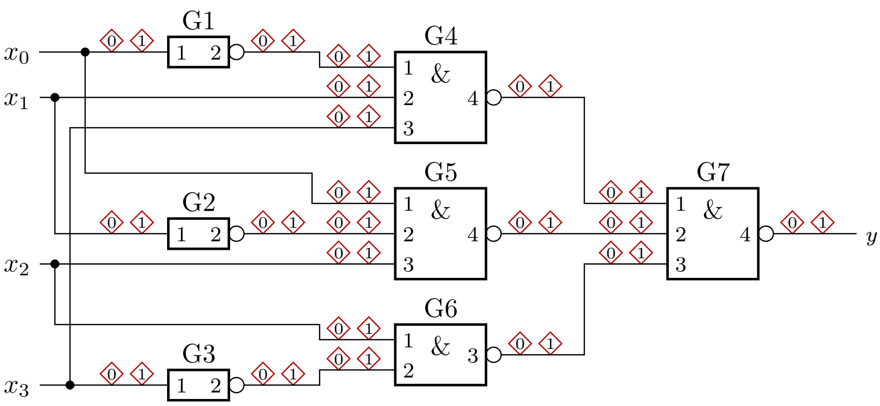
---

w Anzahl der Eingabebits.

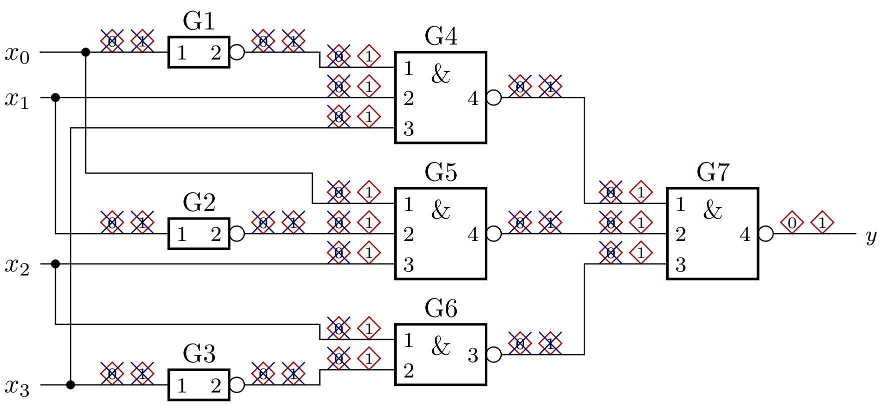
t_T Testzeit, wenn jeder Einzeltest 100 ns dauert.

2.3 Haftfehler

Aufgabe 2.3: Vereinfachung einer Haftfehlermenge



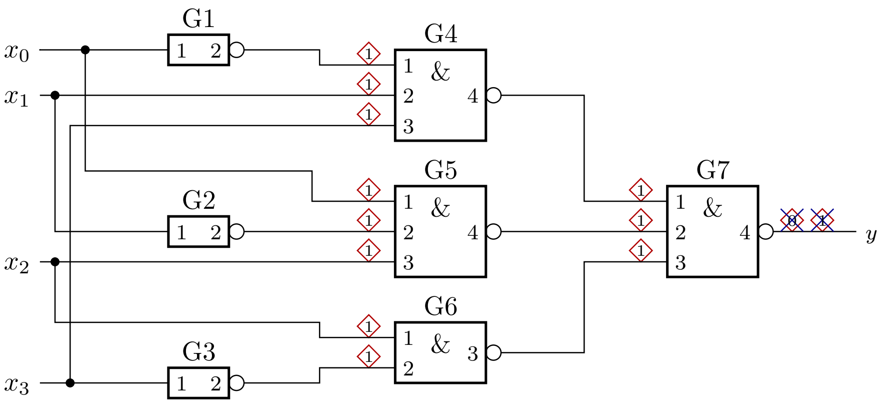
a) *Fassen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler zu einem Modellfehler zusammen.*



Identisch nachweisbare Haftfehler:

- sa0(G1-1), sa1(G1-2), sa1(G4-1)
- sa1(G1-1), sa0(G1-2), sa0(G4-1), sa1(G4-4), sa1(G7-1), ...

b) *Bestimmen Sie davon alle implizit nachweisbaren Haftfehler.*



Implizit nachweisbare Haftfehler:

- sa0(G7-4): sa1(G7-1), sa1(G7-2), sa1(G7-3)
- sa1(G7-4): sa1(G4-1), sa1(G4-2), sa1(G4-3), sa1(G5-1), ...

2.4 Defektanteil

Aufgabe 2.4: Ausbeute, Defektanteil und -abdeckung

Die Ausbeute in einem Fertigungsprozess beträgt mindesten $Y \geq 40\%$ und die Produkte sollen einen Defektanteil von max. $DL \leq 500\,\text{dpm}$ haben.

a) *Wie groß muss die Defektabdeckung mindestes sein?*

(2.9) $$DC = \frac{1-Y}{1+(DL-1)\cdot Y}$$

$$DC \geq \frac{1-40\%}{1+(5\cdot 10^{-4}-1)\cdot 0{,}4} = 1 - 3{,}33\cdot 10^{-4}$$

Es darf max. einer von 3.000 Defekten unerkannt bleiben.

b) *Auf welchen Wert darf die Ausbeute max. einbrechen, dass der Defektanteil nicht größer als* $DL_{\max} \leq 1.000\,\text{dpm}$ *wird?*

(2.9) $$DC = \frac{1-Y}{1+(DL-1)\cdot Y}$$

$$Y = \frac{1-DC}{DL\cdot DC + 1 - DC}$$

$$Y \geq \frac{3{,}33\cdot 10^{-4}}{10^{-3}\cdot(1-3{,}33\cdot 10^{-4}) + 3{,}33\cdot 10^{-4}} = 25\%$$

Fehleranteil 1.000 dpm wird schon unterschritten, wenn die Ausbeute 25% unterschreitet.

DC Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
Y, DL Ausbeute, Defektanteil.
DL_{M} Defektanteil der Fertigung vor Aussortieren der erkannten defekten Produkte.
dpm Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).

Aufgabe 2.5: Defektanteil eines Rechners

Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, ...) und Lötstellen.

Bauteile	Anzahl	Defektanteil	Summation für den gesamten Rechner
Leiterplatten	2	600 dpm	dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+ dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+ dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+ dpm
			= dpm

a) *Wie groß ist der zu erwartende Defektanteil des Rechners, wenn anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigbar sind?*

(2.11) $$\mu_{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{\#Prt} \mu_{\mathrm{DL}.i}$$

Bauteil	Anzahl	Defektanteil	Produkt
Leiterplatten	2	600 dpm	1200 dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+ 6000 dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+ 1800 dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+ 5000 dpm
			= 14000 dpm

Von 1000 Rechnern enthalten im Mittel 14 beim Verkauf ein defektes Bauteil, das aber in der Regel nur schwer bemerkbare Fehler enthält.

b) *Auf welchen Wert verringert sich der Defektanteil, wenn für alle Arten von Bauteilen die Anzahl halbiert wird?*

Bei der halben Bauteilzahl und ansonsten gleichen Werten halbiert sich der Defektanteil. Statt im Mittel 14 enthalten im Mittel nur 7 von 1000 Rechnern ein defektes Bauteil.

dpm — Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).
μ_{F} — Zu erwartende Fehleranzahl des Gesamtsystems.
$\#Prt$ — Anzahl der Bauteile.
$\mu_{\mathrm{DL}.i}$ — Zu erwartendender Defektanteil von Bauteil i.

2.5 Zuverlässigkeit und Test

Aufgabe 2.6: Fehleranzahl, MF-Rate und Zuverlässigkeit

In einer Iteration aus Test und Fehlerbeseitigung, bei der alle erkannten Fehler beseitigt wurden, war bei Erhöhung der Anzahl der dynamischen Tests von 10^5 auf 10^6 eine Verringerung der MF-Rate von 10^{-3} auf $4 \cdot 10^{-5}$ MF je DS zu beobachten. MF durch Störungen sind zu vernachlässigen.

$N_1 = 10^5$, $N_2 = 10^6$, $\zeta(N_1) = 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$

a) *Auf welchen Exponenten K für die Dichte der MF-Rate lässt sich unter den Modellannahmen in der Vorlesung daraus schließen?*

(2.24) $$K = \log\left(\frac{\zeta_{\mathrm{F}}(N_1)}{\zeta_{\mathrm{F}}(N_2)}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right) - 1$$

Wegen $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$ ist $\zeta_{\mathrm{F}} = \zeta$:

$$K = \left(\ln\left(\frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}}\right) / \ln\left(\frac{10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]}{10^{-6}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]}\right)\right) - 1 = 0{,}4$$

b) *Wie viele Fehler werden in der Iteration aus Test und Beseitigung der erkennbaren Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von N_1 auf N_2 abschätzungsweise beseitigt?*

(2.23) $\zeta_{\mathrm{F}}(N) \overset{(\leq 1)}{=} \frac{\mu_{\mathrm{F}}(N)\cdot K}{N}$

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = \frac{N_1}{K}\cdot\zeta(N_1) = \frac{10^5}{0{,}4}\cdot 10^{-3} = 251\ [\mathrm{F}]$$
$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \frac{N_2}{K}\cdot\zeta(N_2) = \frac{10^6}{0{,}4}\cdot 4\cdot 10^{-5} = 100\ [\mathrm{F}]$$

Zu erwartende Anzahl der zu beseitigenden Fehler:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) - \mu_{\mathrm{F}}(N_2) = 151\ [\mathrm{F}]$$

c) *Welche Zuverlässigkeit ist nach N_2 Tests zu erwarten und welche Testsatzlänge N_3 ist unter den Modellannahmen erforderlich, um die zu erwartende Zuverlässigkeit auf $10^8\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ zu erhöhen?*

(2.29) $R_{\mathrm{F}}(N) \overset{(\geq 1)}{=} = \frac{1}{\zeta_{\mathrm{F}}(N)} = R_{\mathrm{F}}(N_0)\cdot\left(\frac{N}{N_0}\right)^{K+1}$

(2.33) $\frac{R_{\mathrm{MT}}(N_2)}{R_{\mathrm{MT}}(N_1)} = \frac{S(N_2)}{S(N_1)} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{K+1}$

Wegen $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$ ist $\zeta = \zeta_{\mathrm{F}}$ und $R = R_{\mathrm{F}}$:

$$R(N_2) = \frac{1}{\zeta(N_2)} = \frac{1}{4\cdot 10^{-5}}\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] = 25.000\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$
$$N_3 = N_2\cdot\left(\frac{R(N_3)}{R(N_2)}\right)^{\frac{1}{K+1}} = 10^6\cdot\left(\frac{10^8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}{2{,}5\cdot 10^4\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}\right)^{\frac{1}{0{,}4+1}} = 3{,}77\cdot 10^8$$

N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter / gesuchter Fehleranzahl oder Zuverlässigkeit.
$\zeta_{\mathrm{F}}(N)$	Fehlfunktionsrate durch Fehler in Abhängigkeit von der Testanzahl.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
ζ_{D}	Fehlfunktionsrate durch Störungen (Malfunction rate due to disturbance).
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
$\mu_{\mathrm{F}}(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
[F]	Zählwert in Fehlern.
$R_{\mathrm{F}}(N)$	Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehler.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Aufgabe 2.7: Vortest und Zufallstest

Von 1000 entstandenen Fehlern erkennt der vorgelagerte statische Test 80%, von den verbleibenden 20% erkennen 20 gezielt gesuchte dynamische Tests 60% und von den dann noch verbleibenden 20% · 40% erkennen weitere 80 zufällige Tests 50%. Beseitigung aller erkannten Fehler.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2\cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

a) *Mit welchem Exponenten K nimmt der zu erwartende Anteil der nicht erkannten Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von $N_0 = 20$ auf $N_1 = 100$ ab?*

(2.17) $K = -\log\left(\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_2)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)$

Bei der Vergrößerung der Anzahl der Zufallstests von $N_0 = 20$ auf $N_1 = 100$ halbiert sich die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler:

$$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{-K} = 5^{-K}$$
$$K = -\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(5)} = 0{,}431$$

b) *Zu erwartende Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

(2.25) $$\mu_{\mathrm{F}}(N_0) = \mu_{\mathrm{FCR}} \cdot (1 - FC_{\mathrm{PT}})$$

(2.30) $$R_{\mathrm{F}}(N) \overset{(\geq 1)}{=} \frac{N}{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N)}$$

Von den entstandenen Fehlern erkennen die statischen Vortests 80%, davon die dynamischen Vortests 60% und davon die Zufallstests 50%:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = \mu_{\mathrm{FCR}} \cdot (1 - FC_{\mathrm{PT}}) \cdot 0{,}5 = 1000\,[\mathrm{F}] \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 40\,[\mathrm{F}]$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{F}}(N_1) = \frac{100}{0{,}431 \cdot 40} = 5{,}8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

c) *Wie groß sind Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Erhöhung der Anzahl der Tests von $N_1 = 100$ auf $N_2 = 1000$?*

(2.16) $$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \quad \text{mit } 0 < K < 1$$

(2.29) $$R_{\mathrm{F}}(N) \overset{(\geq 1)}{=} = \frac{1}{\zeta_{\mathrm{F}}(N)} = R_{\mathrm{F}}(N_0) \cdot \left(\frac{N}{N_0}\right)^{K+1}$$

Zu erwartende Fehleranzahl:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = 40\,[\mathrm{F}] \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{-0{,}431} = 14{,}8\,[\mathrm{F}]$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{F}}(N_2) = 5{,}8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{1+0{,}431} = 157\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

d) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf 4?*

(2.16) $$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \quad \text{mit } 0 < K < 1$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl N_3:

$$N_3 = N_1 \cdot \left(\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_3)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}\right)^{-\frac{1}{K}}$$
$$= 100 \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^{-\frac{1}{0{,}431}} = 20.900$$

Eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl der nicht beseitigten Fehler von 40 auf 4 erfordert zusätzlich 20.800 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 209-fache Testsatzlänge.

e) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf $R_{\mathrm{F}}(N) = 1000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$?*

(2.29) $$R_{\mathrm{F}}(N) \overset{(\geq 1)}{=} = \frac{1}{\zeta_{\mathrm{F}}(N)} = R_{\mathrm{F}}(N_0) \cdot \left(\frac{N}{N_0}\right)^{K+1}$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl N_4:

$$N_4 = N_1 \cdot \left(\frac{R_{\mathrm{F}}(N_4)}{R_{\mathrm{F}}(N_1)}\right)^{\frac{1}{1+K}}$$
$$= 100 \cdot \left(\frac{1000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}{5{,}8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}\right)^{\frac{1}{1{,}431}} = 3.656$$

Eine Erhöhung der Zuverlässigkeit von 5,8 auf 1000 (etwa das 170-fache) verlangt nur zusätzlich 3.556 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 25-fache Testsatzlänge.

μ_{FCR} Zu erwartende Fehleranzahl aus den Entstehungs- und Reparaturprozessen insgesamt.

FC_{PT} Fehlerabdeckung aller Vortests zusammen.

N_0	Anzahl der dynamischen Tests aller Vortests zusammen.
N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
$\mu_F(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$R_F(N)$	Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehler.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
(≤ 1)	Der errechnete Wert ist eine Untergrenze. Der tatsächliche Wert ist mindestens eins.

2.6 Reifeprozesse

Aufgabe 2.8: Reifeprozess, Zuverlässigkeitserhöhung

Ein bei vielen Nutzern eingesetztes Software-System hat nach einer Reifedauer von 100 Tagen eine Zuverlässigkeit von $10^5\,\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}$. Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge sei $K = 0{,}4$. Die Testanzahl vor dem Einsatz und MF-Rate durch Störungen seien vernachlässigbar.

$t_{\mathrm{M0}} = 100\,\mathrm{Tage}$, $R(t_{\mathrm{M0}}) = 10^5\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$, $K = 0{,}4$, $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$, $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$

a) *Nach wie vielen weiteren Tagen Reifedauer verzehnfacht sich die Zuverlässigkeit?*

$$R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M}}) = R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{2.44}$$

Unter Vernachlässigung von t_{V0} gegenüber t_{M} und mit $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$ ($R = R_{\mathrm{F}}$) gilt für die gesamte Zuverlässigkeit:

$$t_{\mathrm{M}} = t_{\mathrm{M0}} \cdot \left(\frac{R(t_{\mathrm{M}})}{R(t_{\mathrm{M0}})}\right)^{\frac{1}{K+1}} =$$
$$= 100\,\mathrm{Tage} \cdot 10^{\frac{1}{1,4}} = 518\,\mathrm{Tage}$$

Verzehnfachung der Zuverlässigkeit nach 418 weiteren Tagen Reifedauer.

b) *Welcher Vergrößerungsfaktor der Zuverlässigkeit ist nach einer Reifezeit von einem Jahr (365 Tage) zu erwarten?*

$$R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M}}) = R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{2.44}$$

Weiterhin Annahme $R = R_{\mathrm{F}}$:

$$R(t_{\mathrm{M}}) = R(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}\right)^{K+1}$$
$$\frac{R(365)}{R(100)} = \left(\frac{365}{100}\right)^{1,4} = 6{,}27$$

Nach insgesammt einem Jahr Reifedauer hat das System die 6,27-fache Zuverlässigkeit im Vergleich zur Bezugsreifedauer t_{M0}.

$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
t_{M0}	Bezugsreifedauer.
$R_F(t_{\mathrm{M}})$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit in Abhängigkeit von der Reifedauer.
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
t_{V0}	Equivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.

Aufgabe 2.9: Reifedauer, Sicherheit

Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge liege im Bereich von $K = 0{,}3\ldots0{,}5$. Die äquivalente Reifedauer vor dem Einsatz sei wieder gegenüber der Bezugsreifedauer t_{M0} vernachlässigbar. Die Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit, dass ein Fehler, wenn er bei einem Anwender eine MF verursacht, beseitigt wird, soll sich nicht ändern und MF durch Störungen sei auch wieder vernachlässigbar.

$K = 0{,}3\ldots0{,}5$, $\zeta_{\mathrm{D}} \ll \zeta_{\mathrm{F}}$, $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$.

a) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_{M} gegenüber t_{M0} erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?*

(2.40) $$\mu_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M}}) = \mu_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{-K}$$

Wegen $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M}}$ ist t_{V0} vernachlässigbar:

$$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}} = \left(\frac{\mu_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M}})}{\mu_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M0}})}\right)^{-\frac{1}{K}} = \frac{1}{10}^{-\frac{1}{K}} = 10^{\frac{1}{K}}$$

K	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}$	2154	316	100

Zur Verringerung der Anzahl der nicht beseitigten Fehler auf ein Zehntel muss die Reifedauer in Abhängigkeit von K auf das hundet bis mehr als 2.000-fache erhöht werden.

b) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_{M} gegenüber t_{M0} erhöht werden, um die Sicherheit des Systems zu verzehnfachen?*

(2.44) $$R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M}}) = R_{\mathrm{MT}}(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1}$$

(1.24) $$S = \frac{R_{\mathrm{MT}}}{\rho}$$

Aufgabe nur unter den idealisierten Annahme sinnvoll, dass die Reaktion auf erkannte Probleme Sicherheitsgefährdungen ausschließt, Störungen keine Rolle spielen ..., d.h. $S \sim R$:

$$\frac{S(t_{\mathrm{M}})}{S(t_{\mathrm{M0}})} = \frac{R(t_{\mathrm{M}})}{R(t_{\mathrm{M0}})} = 10 = \left(\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}\right)^{K+1}$$
$$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}} = 10^{1/(K+1)}$$

K	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}$	5,88	5,18	4,64

Die zehnfache Sicherheit verlangt die 5 bis 6-fache Reifedauer. Viel geringere Abhängigkeit von K als in der Teilaufgabe zuvor.

K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
ζ_{D}, ζ_{F}	Fehlfunktionsrate durch Störungen, Fehlfunktionsrate durch Fehler.
t_{V0}	Equivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.
t_{M0}	Bezugsreifedauer.
$\mu_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M}})$	Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Reifedauer.
S	Sicherheit (Safety or security).
ρ	Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen.

2.7 Fehlervermeidung

Aufgabe 2.10: Nicht beseitigte Programmierfehler

Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in einem Programm mit 10^5 NLOC (Netto Lines of Code) bei einer Fehlerentstehungsrate von 40 Fehlern je 1000 NLOC, wenn der Test 80% der Fehler erkennt, erkannte Fehler beseitigt werden und bei der Fehlerbeseitigung keine neuen Fehler entstehen?

$C = 10^5\,\mathrm{NLOC}$, $\xi = \frac{40\,\mathrm{F}}{1000\,\mathrm{NLOC}}$, $FC = 80\%$.

(2.48) $\quad \mu_{\mathrm{CF}} = \xi_{<\mathrm{C}>} \cdot C$

(2.1) $\quad FC = \left.\frac{\#DF}{\#F}\right|_{\mathrm{ACR}}$

Zu erwartende Anzahl der entstehenden und nicht erkannten und damit auch nicht beseitigten Fehler:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{F}} &= \xi \cdot C \cdot (1 - FC)\\ &= 10^5\,\mathrm{NLOC} \cdot 40\left[\tfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right] \cdot (1 - 80\%) = 800\ [\mathrm{F}]\end{aligned}$$

Es entstehen 4000 Fehler, von denen 800 nicht erkannt und damit nicht beseitigt werden.

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
C	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
ξ	Fehlergenerierungsrate in zu erwartenden Fehlern je NLOC.
FC	Fehlerabdeckung (fault coverage), Anteil der nachweisbaren Fehler.
[F]	Zählwert in Fehlern.

Aufgabe 2.11: Fehlervermeidung

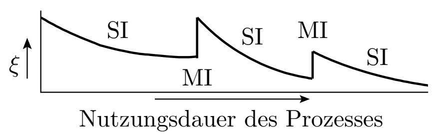
a) *Warum wird für Entstehungsprozesse Determinismus angestrebt?*

Determinismus ist Voraussetzung für die Erfolgskontrolle einer Fehlerbeseitigung durch Testwiederholung. Eine Erfolgskontrolle mit klarer ja/nein-Aussage ist die Voraussetzung für den Rückbau nach erfolglosen Fehlerbeseitigungsversuchen und die Fortsetzung der Prozessverbesserung mit den nächsten Fehlersymtomen.

b) *Wie wird der Reparaturerfolg bei nicht deterministischen Prozessen kontrolliert?*

Bei nicht deterministischen Prozessen wird der Erfolg von Verbesserungen anhand von Erwartungswerten, Varianzen, Verteilungen, ... messbarerer Produkteigenschaften kontrolliert. Verlangt statt einer Prozesswiederholung eine statistisch signifikante Anzahl von sehr vielen Wiederholungen.

c) *Warum hat der Defektanteil von Produkten typischerweise einen sägezahnförmigen Verlauf über die Jahre, die das Produkt gefertigt wird?*



Bei der Einführung neuer Maschinen, Verfahren, ... kommen Fehler in den Prozess und erhöhen die Fehlerentstehungsrate. Mit der Prozessnutzung werden diese Fehler und Schwachstellen beseitigt, so dass die Fehlerentstehungsrate abnimmt, bis die nächste grosse Neuerung eingeführt wird. Neuerungen haben oft geringere störungsbedingte Fehlerentstehungsraten, so dass die Fehlerentstehungsrate und damit der Defektanteil über mehrere »Sägezähne« abnimmt.

ξ	Fehlerentstehungsrate.
MI	Große Innovationen (Major innovations).
SI	Kleine Verbesserungen (Small improvements).

3 Wahrscheinlichkeiten

3.1 Verkettete Ereignisse

Aufgabe 3.1: Würfelexperimente

X und Y seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«. Bestimmen Sie für die nachfolgenden verketteten Ereignisse jeweils

- die möglichen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die günstigen Ergebnisse und deren Anzahl,
- und daraus die Eintrittswahrscheinlichkeit bei gleicher Auftrittshäufigkeit aller möglichen Ergebnisse.

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

a) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis $X + Y > 8$?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 3+6, 4+5, 4+6, 5+4, bis 5+6, 6+3 bis 6+6
- Anzahl günstig: 1+2+3+4=10

$$\mathbb{P}[X + Y > 8] = \frac{10}{36}$$

b) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis $X > Y$?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 2>1, 3>1, 3>2, 4>1 bis 4>3, 5>1 bis 5>4, 6>1 bis 6>5
- Anzahl günstig: 1+2+3+4+5=15

$$\mathbb{P}[X > Y] = \frac{15}{36}$$

c) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis $(X = 5) \wedge (Y < 5)$?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (5,1) bis (5,4)
- Anzahl günstig: 4

$$\mathbb{P}[(X = 5) \wedge (Y < 5)] = \frac{4}{36}$$

d) *Wahrscheinlichkeit, dass $X \cdot Y$ durch drei teilbar ist?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (3,1) bis (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,1) bis (6,6), (1,6), (2,6), (4,6), (5,6)
- Anzahl günstig: 20

$$\mathbb{P}[(X \cdot Y)\,\%3 = 0] = \frac{20}{36}$$

X, Y	Zufallsvariablen für Würfelergebnisse.
$\mathbb{P}[\ldots]$	Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses ...

$a\%b$ Divisionsrest.

Aufgabe 3.2: Verkettete Würfelereignisse

Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »Würfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden« und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der Ergebnisse ein?

mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit je Ereignis
1 bis 5,	6^{-1}
6+1 bis 6+5	6^{-2}
6+6+1 bis 6+6+5	6^{-3}
...	...

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten:

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6^3}+\ldots \overset{\text{(SGS)}}{=} 5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}6^{-i} = 5\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1\surd$$

SGS Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0\cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

Aufgabe 3.3: Fehlfunktionen durch Fehler

Ein System habe vier Fehler, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$ und $p_4 = 1\%$ als Service-Leistung eine Fehlfunktion liefern.

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

Hilfestellung: Verwenden Sie folgende Ereignisdefinitionen:

- $F_{i.j}$ Fehler i verursachen MF bei DS j, $\mathbb{P}[F_{i.j}] = p_i$
- A_j mindestens 1 MF durch einen der 4 Fehler bei DS j
- B keine MF durch einen der 4 Fehler bei einer der 10 DS
- C jeder Fehler i mindestens eine MF bei einer der 10 DS

a) *Wie hoch ist die MF-Rate durch Fehler als Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der vier Fehler eine MF verursacht?*

$$\mathbb{P}[\bar{A}] = 1-\mathbb{P}[A] \quad (3.4)$$

$$\mathbb{P}[A\wedge B] = \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B] \quad (3.5)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_j, dass mindestens einer der 4 Fehler eine MF bei DS j verursacht:

$$\begin{aligned} A_j &= F_{1.j}\vee F_{2.j}\vee F_{3.j}\vee F_{4.j} \\ A_j &= \overline{\bar{F}_{1.j}\bar{F}_{2.j}\bar{F}_{3.j}\bar{F}_{4.j}} \\ \mathbb{P}[A_j] &= 1-\prod_{i=1}^{4}(1-p_i) \\ &= 1-0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}95\cdot 0{,}99 = 23{,}3\% \end{aligned}$$

b) *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass hintereinander zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?*

$$\begin{aligned} B &= \bar{A}_1\wedge\bar{A}_2\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{10} \\ \mathbb{P}[B] &= (1-\mathbb{P}[A_j])^{10} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{4}(1-p_i)\right)^{10} = 2\% \end{aligned}$$

c) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht jeder der vier Fehler mindestens eine Fehlerfunktion bei 10 Service-Leistungen?*

$$\begin{aligned} C &= (F_{1.1} \vee \ldots \vee F_{1.10}) \wedge (F_{2.1} \vee \ldots \vee F_{2.10}) \wedge \ldots \wedge (F_{4.1} \vee \ldots \vee F_{4.10}) \\ &= \overline{(\bar{F}_{1.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{1.10})} \wedge \overline{(\bar{F}_{2.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{2.10})} \wedge \ldots \wedge \overline{(\bar{F}_{4.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{4.10})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[C] = \prod_{i=1}^{4} 1 - (1 - p_i)^{10}$$

p_i	10%	20%	5%	1%	$\mathbb{P}[C]$
$1 - (1 - p_i)^{10}$	65,1%	89,3%	40,1%	9,6%	2,24%

DS Erbrachte Service-Leistung.
MF Fehlfunktion (Malfunction).
p_i Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler i.

Aufgabe 3.4: Gewichteter Zufallstest

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung $\mathbf{x} = 11111110_2$ ist, wenn

a) *für alle Bitwerte x_i zufällig und unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit $g = 50\%$ bzw. 60% der Wert eins und sonst null gewählt wird?*

Beschreibung der Auswahl der Bitwerte $x_i = 1$ durch Ereignisse G_i mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten g_i:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_7 \wedge G_6 \wedge G_5 \wedge G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}[\mathbf{x} = 11111110_2] &= g^7 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} = 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$

b) *in Abweichung zu Aufgabenteil a für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Bitwert gewählt wird?*

Für $G_7 = G_6 = G_5 = G_4$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}[\mathbf{x} = 11111110_2] &= g^4 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} = 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$
$G_7 = G_6 = G_5 = G_4$	$2^{-5} = 3\%$	$0{,}6^4 \cdot 0{,}4 = 5\%$

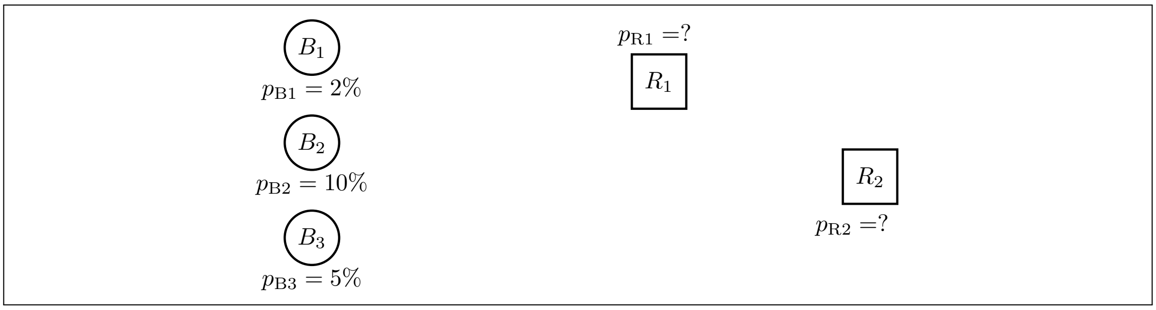
$g(\ldots)$ Wichtung, Auftrittshäufigkeit des Signalwerts 1.
G_i Ereignis Bit i gleich eins.

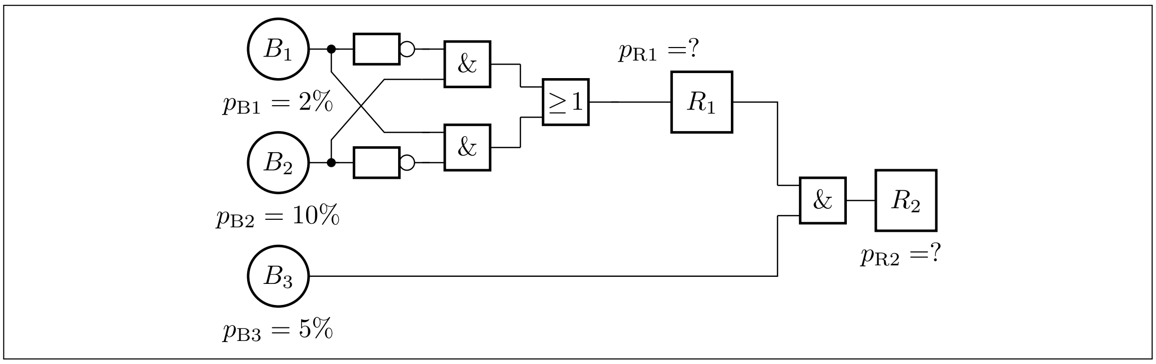
3.2 Fehlerbaum

Aufgabe 3.5: Fehlerbaumanalyse

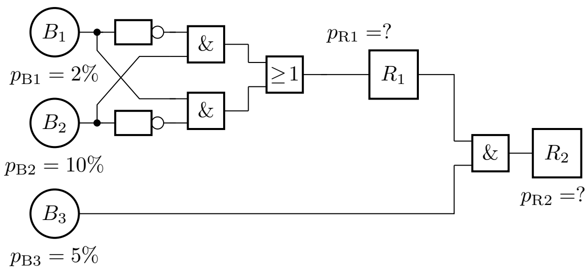
Ereignis R_1 tritt ein, wenn entweder B_1 und nicht B_2 oder nicht B_1 und B_2 eintritt. Ereignis R_2 tritt ein, wenn R_1 und B_3 eintreten. Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse: $p_{B1} = 2\%$, $p_{B2} = 10\%$, $p_{B3} = 5\%$.

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*





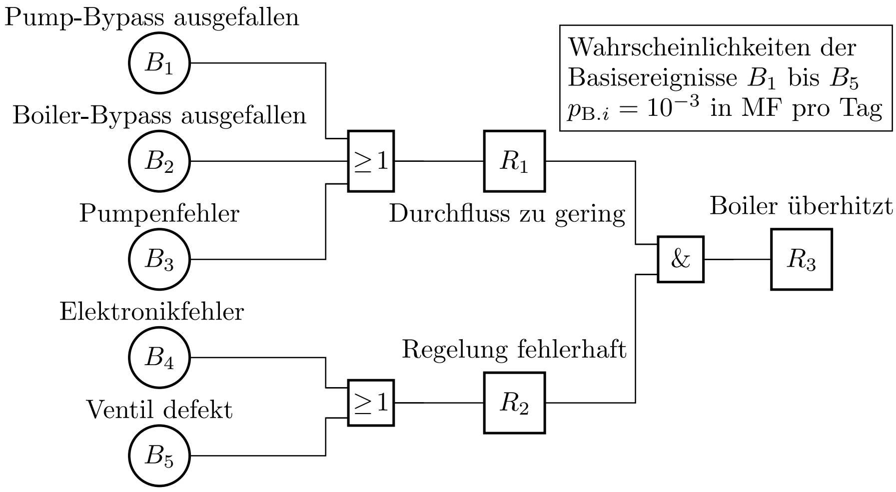
b) *Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse R_1 und R_2?*



$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[B_1 \wedge \bar{B}_2\right] &= p_{\mathrm{B1}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B2}}) = 2\% \cdot 90\% = 1{,}8\% \\
\mathbb{P}\left[B_2 \wedge \bar{B}_1\right] &= p_{\mathrm{B2}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B1}}) = 10\% \cdot 98\% = 9{,}8\% \\
R_1 &= \left(B_1 \wedge \bar{B}_2\right) \vee \left(B_2 \wedge \bar{B}_1\right)^* \\
\mathbb{P}\left[R_1\right] &= 1{,}8\% + 9{,}8\% = 11{,}6\% \\
\mathbb{P}\left[R_2\right] &= \mathbb{P}\left[R_1 \wedge B_3\right] = 11,6\% \cdot 5\% = 0{,}58\%
\end{aligned}$$

* $B_1 \wedge \bar{B}_2$ und $B_2 \wedge \bar{B}_1$ schließen sich gegenseitig aus.

Aufgabe 3.6: Fehlerbaumauswertung



Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten p_{R1} bis p_{R3} der Fehlerereignisse R_1 bis R_3 pro Tag?

$$\begin{aligned} R_1 &= B_1 \vee B_2 \vee B_3 = \overline{\bar{B}_1 \wedge \bar{B}_2 \wedge \bar{B}_3} \\ p_{\mathrm{R1}} &= 1 - (1 - \mathbb{P}[B_1]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_2]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_3]) \\ &\approx \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[B_3] = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tag}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= B_4 \vee B_5 = \overline{\bar{B}_4 \wedge \bar{B}_5} \\ p_{\mathrm{R2}} &= 1 - (1 - \mathbb{P}[B_4]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_5]) \approx 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tag}^{-1} \\ R_3 &= R_1 \wedge R_2 \\ p_{\mathrm{R3}} &= p_{\mathrm{R1}} \cdot p_{\mathrm{R2}} = 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Tag}^{-1} \end{aligned}$$

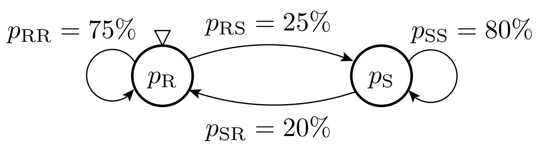
3.3 Markov-Ketten

Aufgabe 3.7: Wettervorhersage mit Markov-Kette

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

Zustände: R (Regen, Anfangszustand), S (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{\mathrm{RR}} = 75\%$, $p_{\mathrm{SS}} = 80\%$

a) *Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?*



b) *Aufstellen der Übergangsfunktion?*

$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n}$$

c) *Wenn es am Tag $i = 0$ regnet, wie groß ist für die Tage $i = 1$ bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?*

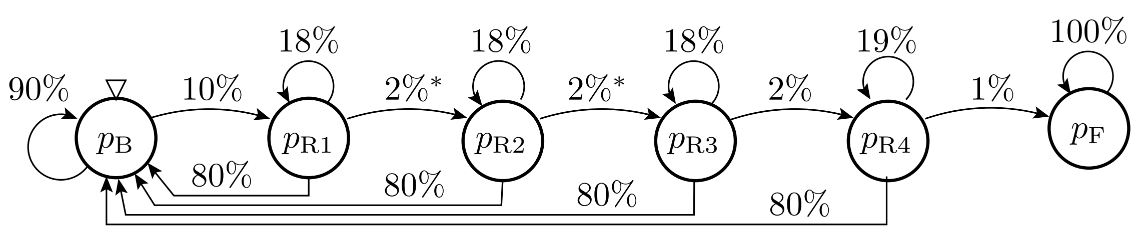
Tag	0	1	2	3	4
p_R	1	0,75	0,6125	0,53687	0,49528
p_S	0	0,25	0,3875	0,46313	0,50472

n Simulationsschrittnummer der Markov-Kette.
p_R Zustand Regen.
p_S Zustand Sonnenschein.
p_{ij} Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i nach Zustand j mit $i, j \in \{R, S\}$.

Aufgabe 3.8: Risikoanalyse

Eine schwerwiege Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand B nacheinander in höhere Riskozustände R_1 bis R_4 übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand B). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand R_4 tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation F ein.

a) *Beschreibung als Markov-Kette?*



b) *Programm zur Simulation der Markov-Kette?*

```
PB = 100; PR1 = 0; PR2=0; PR3=0; PR4=0; PF=0;
print('  n|   P_G|    PR1|   PR2|   PR3|    PR4 |    PF');
for n in range(1,8):
 PB_n = PB*0.9 + PR1*0.8 + PR2*0.8 + PR3*0.8 + PR4*0.8;
 PR1_n = PB*0.10 + PR1*0.18;
 PR2_n = PR1*0.02 + PR2*0.18;
 PR3_n = PR2*0.02 + PR3*0.18;
 PR4_n = PR3*0.02 + PR4*0.19;
 PF = PR4*0.01 + PF;
 PB=PB_n; PR1=PR1_n; PR2=PR2_n; PR3=PR3_n; PR4=PR4_n;
 print('%3i|%6.3f| %6.3f|%6.3f|%6.3f|%8.6f|%8.6f'%(n,
   PB, PR1, PR2, PR3, PR4, PF))
```

c) *Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für $n = 1$ bis 7 und $n = 10^6$?*

n	p_B	p_{R1}	p_{R2}	p_{R3}	p_{R4}	p_F
1	90,000%	10,000%	0,000%	0,000%	0,000000%	0,000000%
2	89,000%	10,800%	0,200%	0,000%	0,000000%	0,000000%
3	88,900%	10,844%	0,252%	0,004%	0,000000%	0,000000%
4	88,890%	10,842%	0,260%	0,006%	0,000080%	0,000000%
5	88,889%	10,841%	0,264%	0,006%	0,000130%	0,000001%
6	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000150%	0,000002%
7	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000157%	0,000004%
10^6	87,485%	10,669%	0,260%	0,006%	0,000157%	1,579632%

p_B Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Grundzustand befindet.
p_{Ri} Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Risikozustands R_i befindet.
p_F Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation eingetreten ist.

3.4 Fehlernachweis

Aufgabe 3.9: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

a) *Wie hoch sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 für die beiden lokalisierbaren Fehler?*

Die Nachweiswahrscheinlichkeiten sind die vorgegebenen Fehlfunktionsraten:

$$p_1 = \zeta_1 = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$$
$$p_2 = \zeta_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

b) *Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare lokalisierbare Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?*

(3.9) $$p_{\mathrm{FD}}(\zeta, N) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta \cdot N}$$

Schlechter nachweisbar ist Fehler 2 mit:

$$\zeta_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

Erforderliche Testsatzlänge für den 99%igen Nachweis:

$$\begin{aligned} p_2(N) &= 1 - \mathrm{e}^{-n \cdot \zeta_2} \geq 99\% \\ N &\geq -\frac{\ln(1-99\%)}{p_2} = 2{,}3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

c) *Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden lokalisierbare Fehler beseitigt sind?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

Die beiden Fehler verursachen 90% der MF. Ihre Beseitigung verringert die Häufigkeit der MF auf 10%, also im Mittel auf jede 10^5-ten Service-Leistung:

$$\zeta = 10^{-5} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$$

Zuverlässigkeit als Kehrwert der MF-Rate:

$$R = 10^5 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

MF	Fehlfunktion (Malfunction).
p_i	Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler i.
ζ_i	Fehlfunktionsrate von Fehler i (Malfunction rate of fault i).
N	Anzahl der Tests.
R	Zuverlässigkeit (Reliability).
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Aufgabe 3.10: Testsatzlänge RAM-Test

Für einen Speicher mit 2^{32} Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der 2^{32} Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

a) *Ab welcher Testsatzlänge N in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 99\%$?*

$$p_{\mathrm{FD}}(\zeta, N) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta \cdot N} \tag{3.9}$$

Unterere Schranke der Fehlfunktionsrate je Speicherzugriff:

$$\zeta_{\min} = \left(50 \cdot 2^{32}\right)^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei N Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(N) = 1 - \mathrm{e}^{-n \cdot \zeta_{\min}} \geq 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$N \geq -\ln(1 - 99\%) \cdot \frac{1}{p_{\min}} = -\ln(1\%) \cdot 50 \cdot 2^{32} \approx 10^{12}$$

b) *Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei 10^8 Speicherzugriffen pro Sekunde?*

Mindesttestdauer:

$$\begin{aligned} t &= N \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \\ &= 10^{12} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} = 2{,}75\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

N	Anzahl der Tests.
$p_{\mathrm{FD}}(\zeta, N)$	Nachweiswahrscheinlichkeit des Fehlers mit N Tests.
$\zeta_{\min}$	Mindestfehlfunktionsrate der unterstellten Fehler.
$p_{\min}$	Mindestnachweiswahrscheinlichkeit der unterstellten Fehler.

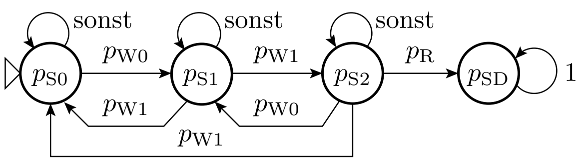
Aufgabe 3.11: RAM-Kopplungsfehler

Schreiben einer 1 in Zelle i verändert Zelle j von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

- Schreibe 0 in Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Schreibe 1 in Zelle i, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Lese Zelle j ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \#A}$.

$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \#A}$.

a) *Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?*



b) *MF-Rate ζ_{CP} des Fehlers als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlernachweis in Schritt N, wenn bis Schritt $N-1$ noch nicht nachweisbar?*

$$\zeta_{\mathrm{CP}}(N+1) = \frac{p_{\mathrm{SD}}(N+1) - p_{\mathrm{SD}}(N)}{1 - p_{\mathrm{SD}}(N)}$$

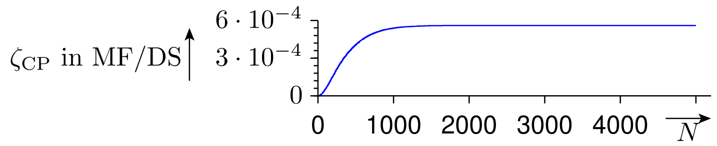
Vermeidung numerischer Probleme durch kleiner Differenzen großer Zahlen:

$$\zeta_{\mathrm{CP}}(N+1) = \frac{p_{\mathrm{S2}}(N) \cdot p_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{S0}}(N) + p_{\mathrm{S1}}(N) + p_{\mathrm{S2}}(N)}$$

c) *Simulationsprogramm mit $\#A = 128$ für $N = 1$ bis 5000?*

```
pS0=1; pS1=0; pS2=0; pSD(1)=0;
A=128; pR = 1/(2*A); pW = 1/(4*A);
for N = 5000;
  pS0_nxt = pS0 * (1-pW) + pS1*pW + pS2*pW;
  pS1_nxt = pS0 * pW   + pS1*(1-pW-pR) + pS2*pW;
  pS2_nxt = pS1 * pR   + pS2*(1-2*pW-pR);
  pSD = pSD(n) + pS2 * pR;
  zeta_CP(N) = pS2*pR / (pS0+pS1+pS2);
  pS0=pS0_nxt; pS1=pS1_nxt; pS2=pS2_nxt;
end;
plot(1:5000, zeta_CP);
```

d) *Darstellung der MF-Rate und Abschätzung der Anzahl der Initialisierungsschritte, bis sich eine konstante MF-Rate einstellt.*



Ab $N_I \approx 1000$ bleibt der relative Wahrscheinlichkeitszuwachs konstant $\zeta \approx 5{,}7\cdot10^{-6}$. Zunahme der Nachweiswahrscheinlichkeit mit der Testanzahl:

$$1-\mathrm{e}^{-N\cdot\zeta_{CP}} \le p_{CP}(N) \le 1-\mathrm{e}^{-(N-N_I)\cdot\zeta_{CP}}$$

Für $N \gg N_I$ wie »ohne Gedächtnis«.

$\#A$	Anzahl der Adressen.
ζ_{CP}	Fehlfunktionsrate des RAM-Kopplungsfehlers.
N	Anzahl der Tests.
p_{W0}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_{W1}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_R	Wahrscheinlichkeit, dass die Speicherzelle gelesen wird.
p_{Si}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
p_{SD}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand »Fehler nachgewiesen« ist.
N_I	Anzahl der Initialisierungsschritte.
$p_{CP}(N)$	Nachweiswahrscheinlichkeit des RAM-Kopplungsfehler als Funktion der Testanzahl N.

3.5 Fehlerbeseitigung

Aufgabe 3.12: Defektanteil nach Ersatz

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute $Y = 60\%$ und der Test erkennt $DC = 90\%$ der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) *Wie groß ist der Defektanteil DL_M der Geräte nach der Fertigung?*

$$Y = 1 - DL_M \cdot DC \quad (2.6)$$

$$DL_M = \frac{1-Y}{DC} \approx \frac{1-60\%}{90\%} = 44{,}4\% = 0{,}444\,\mathrm{dpu}$$

b) *Wie hoch ist der zu erwartende Defektanteil DL nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?*

(2.7) $DL = \frac{DL_{\mathrm{M}}\cdot(1-DC)}{1-DL_{\mathrm{M}}\cdot DC}$

$$DL = \frac{44{,}4\% \cdot (1-90\%)}{1-44{,}4\% \cdot 90\%}$$
$$= 0{,}074\,\mathrm{dpu} = 74.000\,\mathrm{dpm}$$

Etwa noch jedes 14. Gerät ist fehlerhaft.

Y	Ausbeute (Yield).
DC	Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
DL_{M}	Defektanteil der Fertigung vor Aussortieren der erkannten defekten Produkte.
DL	Defektanteil nach Aussortieren oder Ersatz erkannter defekter Produkte.
dpu	Anteil der fehlerhaften Objekte (defecs per unit).
dpm	Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).

Aufgabe 3.13: Defektabdeckungdeckung Schaltkreistest

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei $Y = 80\%$ und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei $DL = 1000\,\mathrm{dpm}$.

a) *Auf welche Defektabdeckung DC der Tests lässt das schließen?*

(2.8) $DL = \frac{(1-Y)\cdot(1-DC)}{Y\cdot DC}$

$$DC = \frac{1-Y}{DL\cdot DC + 1 - Y}$$
$$= \frac{1-80\%}{10^{-3}\cdot 80\% + 1 - 80\%} = 99{,}6\%$$

Ist eine so hohe Defektabdeckung für Schaltkreise realistisch oder beziehen sich die Angaben zum Defektanteil auf den viel geringeren Anteil der von Geräteherstellern reklamierten Schaltkreise mit nachweisbaren Fertigungsfehlern?

b) *Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf $Y = 30\%$ durch eine technologische Umstellung auf den Defektanteil der gefertigten Schaltkreise aus?*

(2.8) $DL = \frac{(1-Y)\cdot(1-DC)}{Y\cdot DC}$

Defektabdeckung aus Aufgabenteil a $DC = 99{,}6\%$. Anstieg des Defektanteil der getesteten Bauteile auf:

$$DL = \frac{(1-30\%)\cdot(1-99{,}6\%)}{99{,}6\%\cdot 30\%} = 9{,}3\cdot 10^{-3} \gg 1000\,\mathrm{DPM}$$

Ein Ausbeuteeinbruch von 80% auf 30% bewirkt, dass sich der Defektanteil der getesteten und ausgelieferten Schaltkreise fast verzehnfacht.

Y	Ausbeute (Yield).
DL	Defektanteil nach Aussortieren oder Ersatz erkannter defekter Produkte.
dpm	Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).
DC	Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.

Aufgabe 3.14: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (1)

Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von 60%.

$\mu_{\mathrm{CF}} = 20$, $p_{\mathrm{FD}} = p_{\mathrm{FD}} = 60\%$

a) *Wie groß darf die Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler η_{RF} maximal sein, damit sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mindestens halbiert?*

(3.27) $$\mu_{\mathrm{F}} = \mu_{\mathrm{CF}} \cdot (1 - p_{\mathrm{FE}}) \cdot (1 + \eta_{\mathrm{RFR}})$$

(3.25) $$\eta_{\mathrm{RFR}} = p_{\mathrm{FE}} \cdot \eta_{\mathrm{RER}} = p_{\mathrm{FE}} \cdot \left(\frac{\eta_{\mathrm{RE}}}{1-\eta_{\mathrm{RE}}}\right) \text{ für } \eta_{\mathrm{RE}} < 1$$

mindestens Halbierung:

$$\frac{\mu_{\mathrm{F}}}{\mu_{\mathrm{CF}}} = \frac{(1 - p_{\mathrm{FD}}) \cdot}{1 - \eta_{\mathrm{RFR}}} \le 0{,}5; \quad \eta_{\mathrm{RFR}} \le 1 - 2 \cdot (1 - p_{\mathrm{FD}}) = 1 - 2 \cdot (1 - 60\%) = 20\%$$

neue Fehler je ursprünglicher Fehler. Aufgelöst nach der Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RE}} \le 1 - \frac{1}{\frac{\eta_{\mathrm{RFR}}}{p_{\mathrm{FE}}} + 1} = 1 - \frac{1}{\frac{0{,}2}{0{,}6} + 1} = 0{,}25$$

b) *Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate ξ_{R} (neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur $p_{\mathrm{R}} = 30\%$ beträgt?*

(3.23) $$\eta_{\mathrm{RE}} = \frac{\eta_{\mathrm{RF}}}{p_{\mathrm{FE}}} = \frac{\xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} < 1$$

Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler nach Aufgabenteil a:

$$\eta_{\mathrm{RE}} \le 0{,}25$$
$$\xi_{\mathrm{R}} = \eta_{\mathrm{RE}} \cdot p_{\mathrm{R}} \le 0{,}25 \cdot 30\% = 7{,}5\%$$

Im Mittel nicht mehr als 7,7 Fehler bei 100 Reparaturversuchen.

μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
p_{FE}	Fehlernachweis- und Beseitigungswahrscheinlichkeit.
η_{RF}	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener Fehler.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je Reparaturversuch.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
μ_{F}	Zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.

Aufgabe 3.15: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (2)

Der Test eines Programms erkennt 95% der 100 entstandenen Fehler. Die Beseitigung eines erkannten Fehler erfordert im Mittel 5 Reparaturversuche und bei 30 Reparaturversuchen entsteht im Mittel 1 neuer Fehler.

$\mu_{\mathrm{CF}} = 100$, $p_{\mathrm{FD}} = p_{\mathrm{FE}} = 95\%$, $p_{\mathrm{R}} = 1/5$, $\xi_{\mathrm{R}} = 1/30$

a) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler μ_{F}?*

(3.26) $\eta_{\mathrm{RFR}} = p_{\mathrm{FE}} \cdot \left(\frac{\xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}-\xi_{\mathrm{R}}}\right)$ für $p_{\mathrm{R}} > \xi_{\mathrm{R}}$

(3.27) $\mu_{\mathrm{F}} = \mu_{\mathrm{CF}} \cdot (1 - p_{\mathrm{FE}}) \cdot (1 + \eta_{\mathrm{RFR}})$

Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RFR}} = \frac{95\% \cdot 0{,}2}{0{,}2 - 1/30} - 95\% = 0{,}13$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler

$$\mu_{\mathrm{F}} = 100 \cdot (1 - 95\%) \cdot (1 + 0{,}13) = 5{,}65$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 0,65 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler.

b) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler μ_{F}, wenn der Verzicht auf Rückbau die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch auf 10% verdreifacht?*

(3.26) $\eta_{\mathrm{RFR}} = p_{\mathrm{FE}} \cdot \left(\frac{\xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}-\xi_{\mathrm{R}}}\right)$ für $p_{\mathrm{R}} > \xi_{\mathrm{R}}$

(3.27) $\mu_{\mathrm{F}} = \mu_{\mathrm{CF}} \cdot (1 - p_{\mathrm{FE}}) \cdot (1 + \eta_{\mathrm{RFR}})$

Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RFR}} = \frac{95\% \cdot 0{,}2}{0{,}2 - 0{,}1} - 95\% = 1{,}9$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler

$$\mu_{\mathrm{F}} = 100 \cdot (1 - 95\%) \cdot (1 + 1{,}9) = 14{,}5$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 9,5 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler.

μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
p_{FE}	Fehlernachweis- und Beseitigungswahrscheinlichkeit.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je Reparaturversuch.
μ_{F}	Zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
η_{RFR}	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener ursprünglicher Fehler.

3.6 Reifeprozess

Aufgabe 3.16: Reifeprozess mit neu entstehenden Fehlern

Fehleranzahl und MF-Rate Vorlesungsbeispiel 3.3

$\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

	$\mu_{\mathrm{F}}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	100	38,32	29,59
$v=1$	0	6,17	2,36
$v=2$	0	0	1,25
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	44,49	33,21

	$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	$4\cdot10^{-4}$	$1{,}39\cdot10^{-5}$	$5{,}64\cdot10^{-6}$
$v=1$	0	$2{,}47\cdot10^{-5}$	$8{,}59\cdot10^{-7}$
$v=2$	0	0	$5{,}02\cdot10^{-6}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot10^{-4}$	$3{,}86\cdot10^{-5}$	$1{,}15\cdot10^{-5}$

a) *Um wie viele Prozent erhöht die Fehlerentstehungsrate $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$ neue je beseitigter Fehler die Anzahl der nicht beseitigten Fehler?*

(3.32) $$p_{\mathrm{NE}}(u-v)=\frac{\mu_{\mathrm{F}}(u,v)}{\mu_{\mathrm{F}}(u-1,v)}=\left(\frac{u-v+u_{\mathrm{V0}}}{u-v-1+u_{\mathrm{V0}}}\right)^{-K}$$

$$p_{\mathrm{NE}}(1,0)=p_{\mathrm{NE}}(2,1)=\left(\frac{N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K}=38{,}32\%$$

$$p_{\mathrm{NE}}(2,0)=\left(\frac{2\cdot N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K}=29{,}59\%$$

u	0	1	2
$v=0$	100	$\mu_{\mathrm{F}}(0)\cdot p_{\mathrm{NE}}(1,0)$ $=100\cdot 38{,}3\%=38{,}32$	$\mu_{\mathrm{F}}(0)\cdot p_{\mathrm{NE}}(2,0)$ $=100\cdot 29{,}6\%=29{,}6$
$v=1$	0	$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(0)-\mu_{\mathrm{F}}(1,0)}{10}=\frac{100-38{,}3}{10}=6{,}17$	$\mu_{\mathrm{F}}(1,1)\cdot p_{\mathrm{NE}}(2,1)$ $=6{,}17\cdot 38{,}32\%=2{,}36$
$v=2$	0	0	$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(1)-\sum_{v=0}^{1}\mu_{\mathrm{F}}(2.v)}{10}$ $\frac{44{,}49-29{,}59-2{,}36}{10}=1{,}25$
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	$38{,}32+6{,}17=44{,}49$	$29{,}59+2{,}36+1{,}25=33{,}21$

1. Version: 34%, 2. Versinon 12%.

b) *Warum verdoppelt eine Fehlerentstehungsrate $\eta_{\mathrm{RFR}}=0{,}1$ neue je beseitigter Fehler etwa die MF-Rate?*

(3.36) $$\zeta_{\mathrm{F}}(u)=K\cdot\sum_{v=0}^{u}\frac{\mu_{\mathrm{F}}(u,v)}{N(u,v)}$$

u	0	1	2
$v=0$	$\frac{0{,}4\cdot 100}{10^5}=4\cdot 10^{-4}$	$\frac{0{,}4\cdot 44{,}49}{1{,}1\cdot 10^6}=1,39\cdot 10^{-5}$	$\frac{0{,}4\cdot 33{,}21}{2{,}1\cdot 10^6}=5{,}64\cdot 10^{-6}$
$v=1$	0	$\frac{0{,}4\cdot 6{,}17}{10^5}=2{,}47\cdot 10^{-5}$	$\frac{0{,}4\cdot 2{,}36}{1{,}1\cdot 10^6}=8{,}59\cdot 10^{-7}$
$v=2$	0	0	$\frac{0{,}4\cdot 1{,}25}{10^5}=5{,}02\cdot 10^{-6}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot 10^{-4}$	$3{,}86\cdot 10^{-5}$	$1{,}15\cdot 10^{-5}$

Die MF-Rate wird von den in jeder Version neu entstandenen Fehlern dominiert, bei denen unter dem Bruchstrich eine effektive Testsatzlänge von 10^5 statt ein Vielfaches von 10^6 steht.

c) *Neuberechung der Tabellen für den halben Testaufwand vor Versionsfreigabe auf $N_{\mathrm{T}}=5\cdot 10^4$. Welchen Einfluss hat das auf die Anzahl der nicht beseitigten Fehler und die MF-Rate durch diese?*

	$\mu_{\mathrm{F}}(u,v)$ für $N_{\mathrm{T}}=10^5$			$\mu_{\mathrm{F}}(u,v)$ für $N_{\mathrm{T}}=5\cdot 10^4$		
u	0	1	2	0	1	2
$v=0$	100	38,32	29,59	100	29,59	22,64
$v=1$	0	6,17	2,36	0	7,04	2,08
$v=2$	0	0	1,25	0	0	1,19
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	44,49	33,21	100	36,63	25,91

Größere Abnahme der Fehleranzahl von grün nach rechts auf 29,6%, statt 38,3% wegen 21-facher statt 11-facher Testsatzlänge. Mehr entstehende Fehler von grün nach grün eins tiefer, weil von den 10% neu entstehenden Fehlern mit nur halb so vielen Tests weniger beseitigt werden. Insgesamt weniger Fehler, weil links von 100 entstandenen Fehlern 61,7 und rechts 70,4 in der Entstehungsversion übrig bleiben.

	$\zeta_F(u,v)$ für $N_T = 10^5$			$\zeta_F(u,v)$ für $N_T = 5\cdot 10^4$		
u	0	1	2	0	1	2
$v=0$	$\frac{K\cdot 100}{10^5} = 4\cdot 10^{-4}$	$\frac{K\cdot 38{,}2}{11\cdot 10^5} = 1{,}4\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 29{,}6}{21\cdot 10^5} = 5{,}6\cdot 10^{-6}$	$\frac{K\cdot 100}{5\cdot 10^4} = 8\cdot 10^{-4}$	$\frac{K\cdot 29{,}6}{10{,}5\cdot 10^5} = 1{,}1\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 22{,}6}{20{,}5\cdot 10^5} = 4{,}4\cdot 10^{-6}$
$v=1$	0	$\frac{K\cdot 6{,}2}{10^5} = 2{,}5\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 2{,}3}{11\cdot 10^5} = 8{,}6\cdot 10^{-7}$	0	$\frac{K\cdot 6{,}2}{5\cdot 10^4} = 5{,}6\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 2{,}1}{11\cdot 10^5} = 7{,}9\cdot 10^{-7}$
$v=2$	0	0	$\frac{K\cdot 1{,}2}{10^5} = 5{,}0\cdot 10^{-6}$	0	0	$\frac{K\cdot 1{,}2}{5\cdot 10^4} = 9{,}5\cdot 10^{-6}$
$\zeta_F(u)$	$4\cdot 10^{-4}$	$3{,}9\cdot 10^{-5}$	$1{,}2\cdot 10^{-5}$	$8\cdot 10^{-4}$	$6{,}7\cdot 10^{-5}$	$1{,}5\cdot 10^{-5}$

Bei gleicher Anzahl haben die neu entstandenen nicht beseitigten Fehler in jeder Version die doppelte MF-Rate wie bei der doppelten Testanzahl vor dem Einsatz. Nicht nur doppelte, sondern ca. dreifache MF-Rate im Vergleich zu einem Reifeprozesss, bei dem bei der Beseitigung keine neuen Fehler entstehen.

$\mu_F(0,0)$	Erwartete Anzahl Fehler in Version 0 (erste freigegebene Version).
N_{V0}	Effektive Testanzahl von Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.
N_{MV}	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
η_{RFR}	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener ursprünglicher Fehler.
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
u, v	Versionnummern und Bezugsversionsnummer des reifenden Objekts.
$\mu_F(u,v)$	Zu erwartende Fehleranzahl in Version u, die in Version v entstanden sind.
$\mu_F(u)$	Zu erwartende Fehleranzahl in Version u.
$\zeta_F(u,v)$	MF-Rate in Version u verursacht von Fehlern die in Version v entstanden sind.
$\zeta_F(u)$	Gesamte Fehlfunktionsrate in Version u.

4 Verteilungen

4.1 Kenngrößen

Aufgabe 4.1: Erwartungswert, Varianz diskrete Verteilung

Gegeben ist die diskrete Verteilung der Werte x_i:

x_i	5	6	8	11	22
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) *Wie groß ist der Erwartungswert?*

(4.4) $$\mathbb{E}[X] = \mu = \sum_{i=1}^{\#x} p_i \cdot x_i$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = 0{,}1\cdot 5 + 0{,}2\cdot 6 + 0{,}4\cdot 8 + 0{,}2\cdot 11 + 0{,}1\cdot 22 = 9{,}3}$$

b) *Wie groß sind Varianz und Standardabweichung?*

(4.6) $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
(4.10) $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$

(4.9) $\mathrm{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= 0{,}1 \cdot (5-9{,}3)^2 + 0{,}2 \cdot (6-9{,}3)^2 + 0{,}4 \cdot (8-9{,}3)^2 \\ &+ 0{,}2 \cdot (11-9{,}3)^2 + 0{,}1 \cdot (22-9{,}3)^2 = 21{,}4\end{aligned}$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= 0{,}1 \cdot 5^2 + 0{,}2 \cdot 6^2 + 0{,}4 \cdot 8^2 + 0{,}2 \cdot 11^2 \\ &+ 0{,}1 \cdot 22^2 - 9{,}3^2 = 21{,}4\end{aligned}$$

Standardabweichung: $\mathrm{sd}[X] = \sqrt{21{,}4} = 4{,}63$

Aufgabe 4.2: Erwartungswert, Varianz Datenstichprobe

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler v_i bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe a) *den Erwartungswert.*

(4.13) $\hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$

$$\hat{\mathbb{E}}[X] = \frac{1}{10} \cdot (58 + 49 + \ldots + 66) \quad = \quad 50{,}7$$

b) *die Varianz.*

(4.14) $\hat{\mathrm{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$

$$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \frac{1}{9} \cdot \left((58-50{,}7)^2 + (49-50{,}7)^2 + \ldots\right) = 140$$

c) *die Standardabweichung.*

(4.15) $\hat{\mathrm{sd}}[X] = \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}[X]}$

$$\hat{\mathrm{sd}}[X] = \sqrt{140} = 11{,}8$$

Aufgabe 4.3: Varianz Summe

Zeigen Sie für zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y, dass die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$\operatorname{Var}[X+Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y] + 2\cdot\operatorname{Cov}[X,Y] \tag{4.22}$$

$$\operatorname{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\right] \tag{4.23}$$

Hilfestellung: Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y:

$$\operatorname{Cov}[X,Y] = \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y]))\right)$$

Var $[X+Y]$ ist die mittlere quadratische Abweichung der Summe $X+Y$ vom Erwartungswert $\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X+Y] &= \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X]+y_i-\mathbb{E}[Y])^2\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left((x_i-\mathbb{E}[X])^2+(y_i-\mathbb{E}[Y])^2+2\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y])\right)\right)\right)\\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{\#x}p_i\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])^2}_{\operatorname{Var}[X]}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{\#y}p_j}_{1}+\underbrace{\sum_{j=1}^{\#y}p_j\cdot(y_j-\mathbb{E}[Y])^2}_{\operatorname{Var}[Y]}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#x}p_i}_{1}\\
&\quad+2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y]))\right)}_{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y]))=\operatorname{Cov}[X,Y]}
\end{aligned}$$

X, Y	Zufallsvariablen.
$\mathbb{E}[\ldots]$	Erwartungswert von ...
$\operatorname{Var}[\ldots]$	Varianz von ...
$\operatorname{Cov}[X,Y]$	Kovarianz der beiden Zuvallsvariablen.
$\#x$, $\#y$	Anzahl der möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen X und Y.
x_i, y_j	Realisierung (möglichen Wert) der Zuvallsvariablen X und Y.
p_j	Eintrittswahrscheinlichkeit der Realisierung x_i und y_j.

Aufgabe 4.4: Erwartungswert und Varianz Turmhöhe

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von $\mathbb{E}[h_\mathrm{B}] = 3\,\mathrm{cm}$ mit einer Standardabweichung von $\operatorname{sd}[h_\mathrm{B}] = 1\,\mathrm{mm}$ haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms $h_\mathrm{T} = 3\cdot h_\mathrm{B}$? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \tag{4.20}$$

$$\operatorname{Var}[X+Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y] \tag{4.21}$$

$$\operatorname{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\operatorname{Var}[X]} \tag{4.9}$$

Erwartungswert der Summe:

$$\mathbb{E}[h_T] = 3 \cdot \mathbb{E}[h_B] = 9\,\mathrm{cm}$$

Varianzen und Standardabweichung der Summe:

$$\mathrm{Var}[h_T] = 3 \cdot \mathrm{Var}[h_B] = 3\,\mathrm{mm}^2$$
$$\mathrm{sd}[h_T] = \sqrt{\mathrm{Var}[h_T]} = \sqrt{3}\,\mathrm{mm}$$

h_B, h_T	Baustein- und Turmhöhe.
$\mathbb{E}[\ldots]$	Erwartungswert von ...
$\mathrm{Var}[\ldots]$	Varianz von ...
$\mathrm{sd}[\ldots]$	Standardabweichung von ...

4.2 Verteilung von Zählwerten

Aufgabe 4.5: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i = 1$ bis 5 seinen unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten nachweisbar:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

a) *Berechung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?*

$\mathbb{P}_1[X=0] = 1 - p_1$

$\mathbb{P}_1[X=1] = p_1$
`Wiederhole für` $i = 2$ `bis` n

$\mathbb{P}_i[X=i] = \mathbb{P}_{i-1}[X=i-1] \cdot p_i$

Fehler	0	1	2	3	4	
$\mathbb{P}_1[X_1=i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2[X_1+X_2=i]$			2%			
$\mathbb{P}_3[X_1+X_2+X_3=i]$				0,8%		
...						

`Wiederhole für` $i = 2$ `bis` n
$\mathbb{P}_i(X=0) = \mathbb{P}_{i-1}(X=0) \cdot (1-p_i) \qquad \mathbb{P}_i(X=i) = \mathbb{P}_{i-1}(X=i-1) \cdot p_i$

`Wiederhole für` $k = 1$ `bis` $i-1$
$$\mathbb{P}_i(X=k) = \mathbb{P}_{i-1}(X=k) \cdot (1-p_i) + \mathbb{P}_{i-1}(X=k-1) \cdot p_i$$

Fehler	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_1[X=i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2[X=i]$	72%	26%	2%			
$\mathbb{P}_3[X=i]$	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
$\mathbb{P}_4[X=i]$	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
$\mathbb{P}_5[X=i]$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

b) *Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?*

(4.25) $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$

(4.26) $\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (1 - p_i)$

(4.9) $\mathrm{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1{,}5$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (1 - p_i) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2\ \ldots$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}95$$

Standardabweichung: $\mathrm{sd}[X] = \sqrt{0{,}95} = 0{,}975$

p_i	Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis von Zählversuch i eins ist.
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
X_i	Potentielle Zählwerte, Zufallsvariablen mit Wertebereich $X_i \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 4.6: Annäherung Binomialverteilung Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binor von Realisierungen und demselben Erwartungswert.

$n = 5$, $\mathbb{E}[X] = 1{,}5$ und $\mathrm{Var}[X] = 0{,}95$

a) *Wie groß sind die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und die Varianz der Binomialverteilung.*

(4.31) $\mathbb{E}[X] = \mu = n \cdot p$

(4.32) $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$$p = \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$
$$\mathrm{Var}[X_{\mathrm{Bin}}] = 5 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3) = 1{,}05$$

Die Varianz der Originalzählverteilung war 0,95 und somit kleiner.

b) *Berechnung der Verteilung und Vergleich mit der Originalverteilung.*

(4.30) $\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(X_{\mathrm{Bin}} = k) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{n-k}$$

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X_{\mathrm{Bin}} = k]$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%
$\mathbb{P}[X = k]^*$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
X	Zufallsvariable.
X_{Bin}	Binomialverteilte Zufallsvariable mit demselben Erwartungs- max. Zählwert.
$\mathbb{E}[\ldots]$	Erwartungswert von ...
$\mathrm{Var}[\ldots]$	Varianz von ...
*	Zählverteilung der Aufgabe zuvor.
$\mathbb{P}[..=x_i]$	Verteilung der diskreten Zufallsvariablen ...
p	Eintrittswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 4.7: Anzahl der Fehlfunktionen

Schätzen sie für $\#DS = 10^4$ und eine MF-Rate von $\zeta = 10^{-5}$ $\left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$

a) *die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen?*

(4.40) $\mathbb{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Eine kleine zu erwartende Anzahl von vielen möglichen Fehlfunktionen ist näherungsweise poisson-verteilt mit dem Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta = 10^4\ [\text{DS}] \cdot 10^{-5}\ \left[\tfrac{\text{MF}}{\text{DS}}\right] = 0{,}1\ [\text{MF}]$$

b) *die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2 und mehr als 2 Fehlfunktionen auftreten?*

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}1\\
\mathbb{P}[X = 0] &= \mathrm{e}^{-0{,}1} = 90{,}48\%\\
\mathbb{P}[X = 1] &= \mathrm{e}^{-0{,}1} \cdot 0{,}1 = 9{,}05\%\\
\mathbb{P}[X = 2] &= \mathrm{e}^{-0{,}1} \cdot \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}45\%\\
\mathbb{P}[X > 2] &= 1 - \mathbb{P}[k = 0] - \mathbb{P}[k = 1] - \mathbb{P}[k = 2]\\
&= 1 - 90{,}48\% - 9{,}05\% - 0{,}45\% = 0,015\%
\end{aligned}$$

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
ζ	Fehlfunktionsrate.
X	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Fehlfunktionen.
k	Wert der Zufallsvariablen X.
λ	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
[DS]	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.

4.3 Bereichsschätzung

Aufgabe 4.8: Maskierungsanzahl Bei der Überwachung von Service-Leistungen wird im Mittel von tausend Fehlfunktion (MF) eine nicht erkannt:

$$p_{\text{M}} = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

a) *von 1000 MF keine und mehr als eine unerkannt bleibt?*

(4.40) $\mathbb{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Für wenige von tausenden zu erwartenden Maskierungen ist die Anzahl der Maskierungen näherungsweise poisson-verteilt, Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \#MF \cdot p_{\text{M}}\\
&= 10^3\ [\text{MF}] \cdot 10^{-3} = 1\ [\text{MMF}]\\
\mathbb{P}[X = 0] &= \mathrm{e}^{-1} = 36{,}8\%\\
\mathbb{P}[X > 1] &= 1 - \mathrm{e}^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 26{,}4\%
\end{aligned}$$

b) *von 5000 MF weniger als 3 und mehr als 8 unerkannt bleiben?*

(4.40) $\mathbb{P}[X=k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\begin{aligned}\lambda &= \#MF \cdot p_{\mathrm{M}} \\ &= 5 \cdot 10^3\ [\mathrm{MF}] \cdot 10^{-3} = 5\ [\mathrm{MMF}] \\ \mathbb{P}[X<2] &= \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!}\right) = 12{,}5\% \\ \mathbb{P}[X>8] &= 1 - \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}\right) \\ &= 6{,}81\%\end{aligned}$$

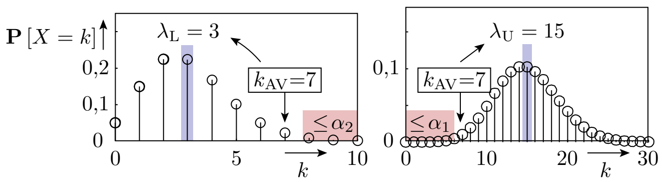
p_{M}	Maskierungswahrscheinlichkeit.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
X	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Maskierungen.
k	Wert der Zufallsvariablen X.
λ	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
[MMF]	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.

Aufgabe 4.9: Bereichsschätzung MF-Rate

Für 10^6 Service-Leistungen wurden 5 Fehlfunktionen gezählt. In welchen Bereich liegt die zu erwartende Fehlerfunktionsrate ζ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

$\#DS = 10^6$, $k_{\mathrm{AV}} = 5$ [MF], $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$

Minimaler und maximaler Erwartungswert siehe (Folie 4.54):



$\sum_{k=0}^{k_{\mathrm{AV}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{L}}^k}{k!} \geq 1 - \alpha_2 \qquad \sum_{k=0}^{k_{\mathrm{AV}}-1} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{U}}} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{U}}^k}{k!} \leq \alpha_1$

Poisson-verteilte Maskierungsanzahl mit Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta$$

$\alpha_1 = \alpha_2$	$k_{\mathrm{AV}} = 4$	$k_{\mathrm{AV}} = 5$	$k_{\mathrm{AV}} = 6$
0,5%	[1,08, 11,0]	[1,54, 12,6]	[2,04, 14,2]
1%	[1,28, 10,0]	[1,79, 11,6]	[2,33, 13,1]
2%	[1,53, 9,08]	[2,09, 10,6]	[2,68, 12,0]
10%	[2,43, 6,68]	[3,15, 7,99]	[3,89, 9,28]
20%	[3,09, 5,51]	[3,90, 6,73]	[4,73, 7,91]

Aus der Tabelle (Folie 4.54) ist für $k_{\mathrm{AV}} = 5$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ der Bereich $\lambda_{\mathrm{L}} = 1{,}79$ und $\lambda_{\mathrm{U}} = 11{,}6$ ablesbar. MF-Rate:

$$1{,}79 \cdot 10^{-6}\ \left[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] \leq \zeta \leq 11{,}6 \cdot 10^{-6}\ \left[\tfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$$

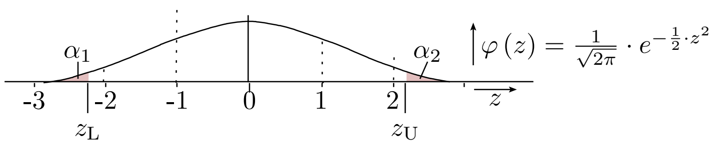
k_{AV}	Ist-Zählwert (Actual count value).
α_1, α_2	Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.
λ_{L}, λ_{U}	Minimaler bzw. maximaler Erwartungswert für einen poisson-verteilten Ist-Wert.

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
ζ	Fehlfunktionsrate.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Aufgabe 4.10: Werkstück mit normalverteilter Masse

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10\,\mathrm{g}$.

Lösungsansatz:

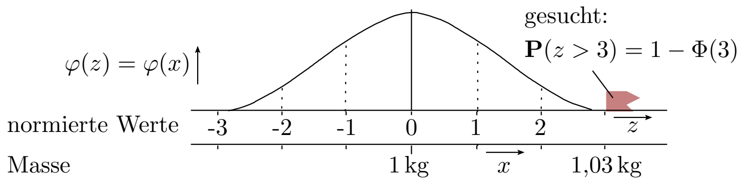


$$\alpha_1 = 1 - \Phi(-z_L) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu - x_L}{\sigma}\right) \tag{4.50}$$

$$\alpha_2 = 1 - \Phi(z_U) = 1 - \Phi\left(\frac{x_U - \mu}{\sigma}\right) \tag{4.51}$$

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X größer als 1,03 kg ist?*

$\mathbb{P}[X > 1{,}03\,\mathrm{kg}]$:

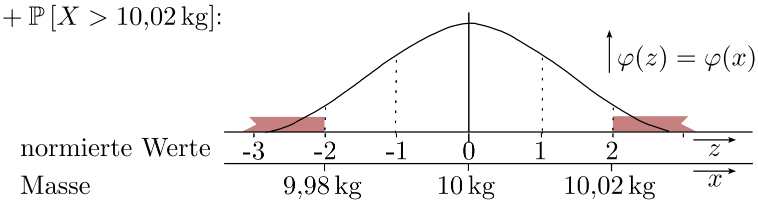


z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$z_U = \frac{1{,}03\,\mathrm{kg} - 1\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{g}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1 - \Phi(3) = 0{,}13\%$

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?*

$\mathbb{P}[X < 9{,}98\,\mathrm{kg}] + \mathbb{P}[X > 10{,}02\,\mathrm{kg}]$:



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$z_L = -2 \;\; z_U = 2, \quad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot (1 - \Phi(2)) = 4{,}56\%$

c) *In welchem Bereich liegt die Masse mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?*

(4.54) $$x_{\mathrm{L}} = \mu + \sigma \cdot z_{\mathrm{L}} = \mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_1)$$
(4.55) $$x_{\mathrm{U}} = \mu + \sigma \cdot z_{\mathrm{U}} = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_2)$$

$\alpha_{1/2}$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\mp\Phi^{-1}(1-\alpha_{1/2})$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\mathrm{L}} = 1\,\mathrm{kg} - 10\,\mathrm{g} \cdot 2{,}33 = 0{,}97\,\mathrm{kg}$$
$$x_{\mathrm{U}} = 1\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{g} \cdot 2{,}33 = 1{,}023\,\mathrm{kg}$$

μ, σ	Erwartungswert, Standardabweichung.
α_1, α_2	Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.
X	Normalverteilte Zufallsvariable.
x_{L}, x_{U}	Untere und obere Schranke des wahrscheinlichen Bereichs von X.
x, z	Werte der Zufallsvariablen X und Z.
$\varphi(z)$	Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung.
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
z_{L}, z_{U}	Transformierte untere und obere Bereichsgrenze.

4.4 Eintrittwahrscheinlichkeit

Aufgabe 4.11: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von 1000 Fehlfunktionen 178 nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0{,}5\%$. Geringe Maskierungabhängigkeiten ($\kappa = 1{,}5$).

$\#MF = n = 1000$ [MF], $x_{\mathrm{AV}} = 178$ [MMF], $\alpha = 1\%$, $\kappa = 1{,}5$

Auf welchen symmetrischen Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit lässt das schließen?

(4.70) $$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{r}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{x_{\mathrm{AV}}} = \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\mathrm{AV}}} \cdot (1-\hat{p})} \cdot \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \text{ für } \hat{p} \le 0{,}5$$ (4.72)

$$\hat{\mathrm{sr}}_{\mathrm{p}} = [p_{\mathrm{L}}, p_{\mathrm{U}}] = \frac{x_{\mathrm{AV}}}{n} \cdot (1 \mp \hat{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) \text{ für } \hat{p} \le 0{,}5$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2{,}57 \cdot \sqrt{1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{178} - \frac{1}{1000}\right)} = 22{,}9\%$$

$$\mathrm{sr}(p_{\mathrm{M}}) = \frac{178}{1000} \cdot (1 \mp 22{,}9\%)$$

Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit: 13,7% bis 21,9%.

$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
x_{AV}	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MMF]	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.
α	Gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit, das Wert außerhalb des geschätzten Bereichs.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \le 1$.
$\Phi^{-1}(..)$	Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
ε_{r}	Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
$\mathrm{sr}(p_{\mathrm{M}})$	Symmetrischer Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit.

4.5 Erforderliche Zählwertgröße

Aufgabe 4.12: Erforderliche Zählwertgröße

Zur Abschätzung der Fehlfunktionsrate ζ wurden für 10^6 Service-Anforderungen 441 Fehlfunktionen gezählt. Keine Abhängigkeiten ($\kappa = 1$).

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

a) *Bereich der MF-Rate, wenn ein relativer Intervallradius von $\varepsilon_{\mathrm{r}} \le 10\%$ des Schätzwerts zugelassen ist?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

(4.72) $$\hat{\mathrm{sr}}_{\mathrm{p}} = [p_{\mathrm{L}}, p_{\mathrm{U}}] = \frac{x_{\mathrm{AV}}}{n} \cdot (1 \mp \hat{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) \text{ für } \hat{p} \le 0{,}5$$

Bereich der MF-Rate:

$$\mathrm{sr}\,(\zeta) = \frac{\#MF}{\#DS} \cdot (1 \mp \varepsilon_{\mathrm{r}}) \quad \text{für } \hat{\zeta} \le 50\%$$

$$= \frac{441\,[\mathrm{MF}]}{10^6\,[\mathrm{DS}]} \cdot (1 \mp 10\%) = (4{,}0 \ldots 4{,}8) \cdot 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$$

ACR bezieht sich immer auf einen zulässigen Intervallradius und eine zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit. Im Beispiel sind die Zälwerte $\#DS \ge 10^6$ und $\#MF \ge 441$ bei $\kappa = 1$ ausreichend für eine Schätzgenauigkeit $\varepsilon_{\mathrm{r}} \le 10\%$ und eine noch zu bestimmende Irrtumswahrscheinlichkeit.

b) *Irrtumswahrscheinlichkeit α, dass die MF-Rate mehr als $\varepsilon_{\mathrm{r}} \le 10\%$ des Schätzwerts von diesem abweicht?*

(4.70) $$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{r}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{x_{\mathrm{AV}}} = \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\mathrm{AV}}} \cdot (1 - \hat{p})} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ für } \hat{p} \le 0{,}5$$

Umgestellte nach der Irrtumswahrscheinlichkeit α:

$$\alpha = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\sqrt{\kappa \cdot \left(\frac{1}{\#MF} - \frac{1}{\#DS}\right)}}\right)\right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{\left(\frac{1}{441} - 10^{-6}\right)}}\right)\right)$$

$$= 2 \cdot (1 - \Phi\,(2{,}1)) = 3{,}6\%$$

z	...,0	...,1
1,...	0,8413	0,8643
2,...	0,9772	0,9821
3,...	0,9987	0,9990

c) *Wie viele Fehlfunktionen müssen mindestens beobachtbar sein, um die Irrtumswahrscheinlichkeit für die $\mp 10\%$ Bereichszugehörigkeit auf $\alpha \le 2\%$ abzusenken?*

(4.74) $$x_{\mathrm{AV}} \ge \kappa \cdot \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}}^{-2} \cdot (1 - \hat{p}) \quad \text{für } \hat{p} \le 0{,}5$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Umgestellung nach dem (erforderlichen) Istzählwert $x_{\mathrm{AV}} = \#MF$:

$$x_{\mathrm{AV}} = \#MF \ge \left(\frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{441}{10^6}\right)$$

$$= \left(\frac{2{,}33}{0{,}1}\right)^2 \cdot 99{,}96\% = 543$$

d) *Auf und um welchen Wert muss die Anzahl ausprobierten Service-Leistungen erhöht werden, um das Ziel in Aufgabenteil c ($\alpha \le 2\%$ für $\varepsilon_{\mathrm{r}} \le 10\%$) zu erreichen?*

(1.9) $$\zeta_{[\mathrm{MT}]} = \frac{1}{R_{[\mathrm{MT}]}} = \left.\frac{\#NDM}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

Proportionale Erhöhung der Anzahl der erbrachten Service-Leistungen zum Zählwert der Fehlfunktionen:

$$\hat{\zeta} = \frac{x_{\mathrm{AV}}(\alpha=3{,}58\%)}{\#DS(\alpha=3{,}58\%)} = \frac{x_{\mathrm{AV}}(\alpha=2\%)}{\#DS(\alpha=2\%)}$$

$$\#DS\,(\alpha=2\%) = \#DS\,(\alpha=3{,}58\%)\cdot\frac{x_{\mathrm{AV}}(\alpha=2\%)}{x_{\mathrm{AV}}(\alpha=3{,}58\%)}$$

$$= 10^6\ [\mathrm{DS}]\cdot\frac{543\ [\mathrm{MF}]}{441\ [\mathrm{MF}]} = 1{,}23\cdot 10^6\ [\mathrm{DS}]$$

Die Anzahl der erbrachten Service-Leistungen $\#DS$ ist um $2{,}31\cdot 10^5$ auf $1{,}23\cdot 10^6$ zu erhöhen.

ζ	Fehlfunktionsrate.
$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[DS]	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
x_{AV}	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \le 1$.
ε_{r}	Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Wert nicht im geschätzten Bereich liegt.
ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.
sr_{ζ}	Symmetrischer Bereich der geschätzten Fehlfunktionsrate.

Aufgabe 4.13: Mindestmodellfehleranzahl

Eine Fehlersimulation soll eine Modellfehlerabdeckung von $99\% \mp 0{,}2\%$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \le 2\%$ nachweisen. Nachweisabhängigkeiten zwischen den Modellfehlern sind für den Überschlag zu vernachlässigen.

$\hat{p} = \hat{FC}_{\mathrm{M}} = 99\% \gg 50\%$, $\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}} = \frac{0{,}2\%}{1-99\%} = 20\%$, $\alpha \le 2\%$, $\kappa = 1$, .

a) *Wie groß muss die Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mindesten bleiben?*

(4.75) $$n - x_{\mathrm{AV}} \ge \kappa\cdot\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\cdot\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}}^2\cdot\hat{p}\quad \text{für } \hat{p} > 0{,}5$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\#NDF_{\mathrm{M}} \ge \frac{\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\cdot\hat{p}}{\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}}^2}$$

$$= \frac{2{,}33^2\cdot 99\%}{0{,}2^2} = 134{,}4\ [\mathrm{F}]$$

Mindesten 135 nicht unabhängig von einander nachweisbare, nicht redundante nicht nachgewiesene Modellfehler.

b) *Welche Anzahl von unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern ist dafür mindestens erforderlich?*

(2.1) $$FC = \left.\frac{\#DF}{\#F}\right|_{\text{ACR}}$$

$$FC_{\text{M}} = 1 - \frac{\#NDF_{\text{M}}}{\#F_{\text{M}}}$$
$$\#F_{\text{M}} = \frac{\#NDF_{\text{M}}}{1 - FC_{\text{M}}} = \frac{136\,[\text{F}]}{1 - 99\%} = 13.600\,[\text{F}]$$

Eine Abschätzung $FC_{\text{M}} \in 99\% \mp 0{,}2\%$ mit $\alpha \leq 2\%$ verlangt 13.600 unabhängig voneinander nachweisbare Modellfehler. Wenn Abhängigkeiten zu berücksichtigen sind ($\kappa > 1$), dann κ-mal so viele.

$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$\hat{FC}_{\text{M}}$	Schätzwert der Modellfehlerabdeckung.
$\hat{\varepsilon}_{\bar{\text{r}}}$	Geschätzter Intervallradius realtiv zum erwarteten Nichteintritts-Zählwerts.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Wert nicht im geschätzten Bereich liegt.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$.
n, x_{AV}	Anzahl der Zählversuche, Experimentell bestimmter Ist-Zählwert.
$\#NDF_{\text{M}}$	Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.
$\Phi^{-1}(..)$	Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
$\#F_{\text{M}}$	Anzahl der Modellfehler.
[F]	Zählwert in Modellfehler.

Aufgabe 4.14: Leistungsabhängiges Gehalt

Beim Programmieren entstehen etwa 10 bis 100 Fehler je 1000 NLOC. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit von der Fehlerentstehungsrate ξ gezahlt werden. Dazu soll der zu erwartende Bereich von ξ mit einer relativen Genauigkeit von 25% bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 4\%$ geschätzt werden. Zusatzannahme: normalverteilte Fehleranzahl mit $\kappa = 1$.

$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2}\left[\frac{\text{F}}{\text{NLOC}}\right] \ll 50\%$, $\varepsilon_{\text{r}} = 25\%$, $\alpha = 4\%$, $\kappa = 1$.

Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

(4.74) $$x_{\text{AV}} \geq \kappa \cdot \left(\Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \cdot \varepsilon_{\text{r}}^{-2} \cdot (1 - \hat{p}) \quad \text{für } \hat{p} \leq 0{,}5$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Mindestanzahl Fehler $\#F_{\text{C}} \geq x_{\text{AV}}$, die für einen ausreichend genaue Evaluierung unabhängig voneinander entstehen müssen:

$$\#F_{\text{C}} \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\varepsilon_{\text{r}}}\right)^2 \cdot \underbrace{\left(1 - 10^{-3} \dots 10^{-2}\right)}_{\approx 1} \geq \left(\frac{2{,}05}{0{,}25}\right)^2 = 67{,}2$$

(2.49) $$\xi_{<\text{C}>} = \frac{\mu_{\text{CF}}(C)}{C}$$

Die Anzahl der zu überprüfenden NLOC je Programmierer:

$$C \geq \frac{67{,}2}{\xi}$$

ξ	10^{-3}	10^{-2}
C	67.200 NLOC	6.720 NLOC

Bei einer typ. Programmierleistung von 100 bis 500 NLOC pro Tag müssen die Programmierfehler über Monate gezählt werden.

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$\hat{\xi}$	Zu schätztende Fehlergenerierungsrate in Fehler je NLOC.
$\left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right]$	Zählwertverhältnis in entstandene Fehler je Netto-Codezeile.
ε_{r}	Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Wert nicht im geschätzten Bereich liegt.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \le 1$.
$\#F_{\mathrm{C}}$	Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
C	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

4.6 Nachweisabhängigkeiten

Aufgabe 4.15: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) *Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.*

(4.13) $$\hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$$

(4.14) $$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$$

Erwartungswert:

$$\hat{\mu} = \frac{58+49+40+54+67+35+34+57+47+66}{10} = 50{,}7$$

Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(58-50{,}7)^2 + (49-50{,}7)^2 + (40-50{,}7)^2 + \ldots}{9} = 140$$

b) *Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?*

(4.37) $$\hat{p} = \frac{\hat{\mu}}{n} = \frac{x_{\mathrm{AV}}}{n}$$

(4.77) $$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\hat{\mu}}{n}\right)}$$

$$\hat{p} = \frac{50{,}7}{1000} = 5{,}07\%$$

$$\hat{\kappa} = \frac{140{,}01}{50{,}7 \cdot (1 - 5{,}07\%)} = 2{,}91$$

Die Varianz ist so hoch, als ob in der Modellfehler immer etwa drei Fehler identisch nachweisbar wären.

$\#v$	Größe der Datenstichprobe.
v_i	Wert i der Datenstichprobe.
$\hat{\mu}$	Geschätzter Erwartungswert des Zählwerts.
$\hat{\sigma}^2$	Geschätzte Varianz des Zählwerts.
$\hat{\kappa}$	Geschätzte Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten.

4.7 Mischverteilung

Aufgabe 4.16: Verteilung von Widerstandswerten

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde gemischt:

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 20 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 0,99 kΩ und Standardabweichung 10 Ω.

$\#R_1 = 500$: $\mu_{\mathrm{R1}} = 1{,}02\,\mathrm{k\Omega}$, $\sigma_{\mathrm{R1}} = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $\#R_2 = 300$: $\mu_{\mathrm{R2}} = 0{,}99\,\mathrm{k\Omega}$, $\sigma_{\mathrm{R2}} = 10\,\mathrm{k\Omega}$

a) *Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste? Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x] = \sum_{j=1}^{\#Y} h_j \cdot F_{X_j}(x) \quad (4.79)$$

$$F_X(R) = \sum_{i=1}^{\#i} h_i \cdot \Phi\left(\frac{R-\mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$F_X(R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1{,}02\,\mathrm{k\Omega}}{20\,\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0{,}99\,\mathrm{k\Omega}}{10\,\Omega}\right)$$

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Widerstand einen Wert $R \le 9{,}8\,\mathrm{k\Omega}$?*

$$\mathbb{P}[R \le 9{,}9\,\mathrm{k\Omega}] = \frac{5}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0{,}98\mathrm{k\Omega} - 1{,}02\,\mathrm{k\Omega}}{20\,\Omega}\right) + \frac{3}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0{,}98\,\mathrm{k\Omega} - 0{,}99\,\mathrm{k\Omega}}{10\,\Omega}\right)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \Phi(-2) + \frac{3}{8} \cdot \Phi(-1) = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{(1-\Phi(2))}_{0{,}0228} + \frac{3}{8} \cdot \underbrace{(1-\Phi(1))}_{0{,}1587}$$

$$= 8{,}23\%$$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$\#R_i$	Anzahl der Widerstände mit Erwartungswert $\mu_{\mathrm{R}i}$ und Standardabweichung $\sigma_{\mathrm{R}i}$.
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
X	Zufallsvariable mit Mischverteilungsfunktion $F_X(x)$.
X_j	Zu mischende Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_{X_J}(x)$.
Y	Zufallsvariable für die Auswahl der gemischten Objekte.
$\#Y$	Anzahl der Objekttypen mit unterschiedlicher Verteilungsfunktion.
h_j	Wahrscheinlichtkeit, dass ein Objekt mit Verteilungsfunktion j ausgewählt wird.

Aufgabe 4.17: Tschebyscheffsche Ungleichung

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

C_i: 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF], $\alpha = 2\%$

a) *Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?*

(4.13) $$\hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$$

(4.14) $$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$$

(4.15) $$\hat{\mathrm{sd}}[X] = \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}[X]}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10} \cdot (1{,}20 + 1{,}23 + 1{,}18 + 1{,}25 + 1{,}21 + 1{,}19$$
$$+1{,}23 + 1{,}22 + 1{,}09 + 1{,}17) = 1{,}17$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(1{,}20 - 1{,}179)^2 + (1{,}23 - 1{,}179)^2 + \dots}{9}} = 0{,}045$$

b) *Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?*

(4.57) $$\mathrm{sr} = [x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{U}}] = \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right)$$

Geschätzter Erwartungswert und geschätzte Standardabweichung der Kapazität aus Aufgabenteil a: $\mu = 1{,}17$ [nF], $\sigma = 0{,}045$ [nF]

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\mathrm{sr}(C) \in \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 1{,}17 \mp 0{,}0450 \cdot 2{,}33$$
$$= [1{,}065,\ 1{,}275]$$

c) *Kapazitätsbereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung?*

(4.86) $$\mathrm{sr} = [x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{U}}] = \mu \mp \tfrac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}$$

Schätzwerte aus Aufgabenteil a: $\mu = 1{,}17$ [nF], $\sigma = 0{,}045$ [nF]

$$\mathrm{sr}(C) \in \mu \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}$$
$$= 1{,}17 \mp \frac{0{,}0540}{\sqrt{2\%}}$$
$$= [0{,}861,\ 1{,}497]$$

Wenn bekannt ist, dass die Kapazitätswerte normalverteilt sich, beträgt der Bereich, in dem 98% der Werte liegen, nur 1,065 bis 1,275.

C_i	Stichprobe von Kapazitätswerten.
[nF]	Wert in nF, Masseinheit der Kapazität.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Wert nicht im geschätzten Bereich liegt.
$\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$	Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung.
$\#v$	Größe der Datenstichprobe.
v_i	Wert i der Datenstichprobe.
$\mathrm{sr}(C)$	Symmetrischer Bereich der Kapazitätswerte.
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

4.8 Pareto-Verteilung

Aufgabe 4.18: Verteilung von Schadenskosten

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000$ Eur seien so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) *Welchen Formfaktor K hat die Pareto-Verteilung?*

(4.102) $$K = \frac{1}{1-\frac{\log(W)}{\log(U)}}$$

$$K = \frac{1}{1-\frac{\ln(90\%)}{\ln(15\%)}} = 1{,}0588$$

b) *Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?*

(4.101) $$W = \frac{\mathbb{E}[X\,|\,X\geq w_{\min}]}{\mathbb{E}[X]} = \left(\frac{x_{\min}}{w_{\min}}\right)^{K-1} = \left(U^{\frac{1}{K}}\right)^{K-1} = U^{\frac{K-1}{K}}$$

$$\begin{aligned} w_{\text{min}} &= x_{\text{min}} \cdot U^{-\frac{1}{K}} \\ &= 10.000\,\text{Eur} \cdot 15\%^{-\frac{1}{1{,}0588}} = 60.000\,\text{Eur} \end{aligned}$$

$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
U	Der Anteil der Ursachen mit der größten Wirkung.
W	Anteil an der Gesamtwirkung.
$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.
$w_{\min}$	Mindestwirkung des Anteils der Ursachen mit der größten Wirkung.

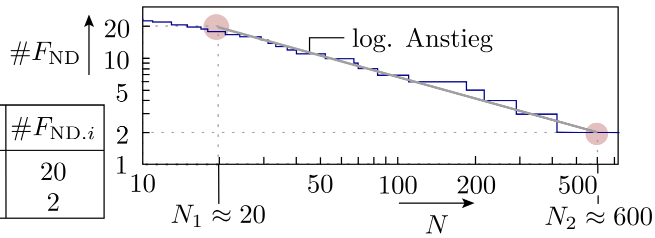
Aufgabe 4.19: Verteilung der Nachweislänge

Zur Abschätzung des Formparameter K einer parato-verteilten Nachweislänge wurden für einen Zufallstestsatz für 24 Modellfehler folgende Nachweislängen bestimmt:

10, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 33, 37, 40, 52, 67, 70, 83, 110, 185, 217, 290, 420, 850, 1730.

a) *Darstellung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler $\#F_{\text{ND}}$ als Funktion der Testanzahl N, doppelt logarithmisch für $N = 10$ bis 1000. Annäherung durch eine Ausgleichsgerade.*

i	N_i	$\#F_{\text{ND}.i}$
1	20	20
2	600	2



b) *Bestimmen Sie aus zwei Punkten der Ausgleichsgeraden den Formfaktor K der Pareto-Verteilung der Nachweislänge.*

(4.93) $$F_X(N) = \mathbb{P}[X \leq N] = \mu_{\mathrm{FC}}(N) = 1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-K} \quad \text{für } N \geq N_0$$

(2.1) $$FC = \left.\frac{\#DF}{\#F}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

$$\#F_{\mathrm{ND}}(N) \sim 1 - \mu_{\mathrm{FC}}(N) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-K}$$

$$\frac{\#F_{\mathrm{ND.1}}}{\#F_{\mathrm{ND.2}}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{-K}$$

$$K = \frac{\ln\left(\frac{\#F_{\mathrm{ND.1}}}{\#F_{\mathrm{ND.2}}}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} = \frac{\ln(10)}{\ln(30)} = 0{,}68$$

i	N_i	$\#F_{\mathrm{ND}.i}$
1	20	20
2	600	2

$F_X(N)$	Verteilungfunktion der Nachweislänge.
$\mu_{\mathrm{FC}}(N)$	Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.
N	Anzahl der Tests.
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
N_i	Testanzahl mit einer bekannter Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.
$\#F_{\mathrm{ND}.i}$	Anzahl der Modellfehler, die mit Testsatzlänge N_i nicht nachweisbar sind.
$F_X(N)$	Verteilungfunktion der Nachweislänge.
$\mu_{\mathrm{FC}}(N)$	Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.
N_0	Testanzahl, für die vorher alle Fehler beseitigt wurden, also für $FC = 0$.
N	Anzahl der Tests, für die erkannten Fehler beseitigt werden, incl. N_0.
$\#F_{\mathrm{D}}$	Anzahl der erkennbaren Fehler (Number of detectable faults).

5 Tests und Kontrollen

5.1 Inspektion

Aufgabe 5.1: Inspektionsfehlerabdeckung

Inspektionsergebnisse für ein Programm aus 1000 NLOC und :

- Inspekteur 1: 85 gefundene Fehler in 5 h
- Inspekteur 2: 76 gefundene Fehler in 4 h
- Schnittmenge: 56 übereinstimmende gefundene Fehler.

$C = 1000\,\mathrm{NLOC}$, $\#F_1 = 85$, $\#F_2 = 76$, $\#(F_1 \cap F_2) = 56$, $t_1 = 5\,\mathrm{h}$, $t_1 = 4\,\mathrm{h}$, daraus ableitbar $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

a) *Effizienz und Effektivität beider Inspekteure?*

Effizienz (gefundene Fehler je Mitarbeiterstunde):

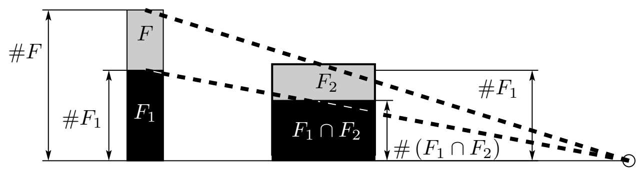
$$EFC_1 = \frac{85\,\text{Fehler}}{5\,\text{h}} = 17\,\frac{\text{Fehler}}{\text{h}}$$
$$EFC_2 = \frac{76\,\text{Fehler}}{4\,\text{h}} = 19\,\frac{\text{Fehler}}{\text{h}}$$

Efffektivität (Gefundene Fehler je 1000 NLOC):

$$EFT_1 = \frac{85\,\text{Fehler}}{1.000\,\text{NLOC}}$$
$$EFT_2 = \frac{76\,\text{Fehler}}{1.000\,\text{NLOC}}$$

b) *Gesamtanzahl und Anzahl der nicht gefundenen Fehler?*

(5.1) $$\hat{\mu}_{\mathrm{F}} = \left.\frac{\#F_1 \cdot \#F_2}{\#(F_1 \cap F_2)}\right|_{\mathrm{ACR}}$$



$$\hat{\mu}_{\mathrm{F}} = \frac{85 \cdot 76}{56} = 115{,}4$$

Zu erwartende Anzahl der nicht gefundenen Fehler:

$$\hat{\mu}_{\mathrm{NDF}} = \hat{\mu}_{\mathrm{F}} - \#\left(M_1 \cup M_2\right) = 115{,}4 - 105 = 10{,}4$$

c) *Inspektionsfehlerabdeckung?*

(5.2) $$\hat{\mu}_{\mathrm{FC}} = \left.\frac{\#(F_1 \cup F_2)}{\hat{\mu}_{\mathrm{F}}}\right|_{\mathrm{ACR}} = \left.\frac{\#(F_1 \cap F_2) \cdot \#(F_1 \cup F_2)}{\#F_1 \cdot \#F_2}\right|_{\mathrm{ACR}}$$

$$\hat{\mu}_{\mathrm{FC}} = \frac{56 \cdot 105}{85 \cdot 76} = \frac{105}{115{,}4} = 91\%$$

Kontrolle:

$$\hat{\mu}_{\mathrm{FC}} = 1 - \frac{\hat{\mu}_{\mathrm{NDF}}}{\hat{\mu}_{\mathrm{F}}} = 1 - \frac{10{,}4}{115{,}4} = 91\% \checkmark$$

Anmerkung: Bei Produkten / Quotient von drei Zählwerten ist der Varianzkoeffizient, hier für das Nichteintreten, die Summe von drei Varianzkooffizienten $\gtrsim 10\%$. Eine Bereichsvorhersage mit $\varepsilon_{\bar{\mathrm{r}}} = 50\%$ hat eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha \gtrsim 2 \cdot (1-) \, \Phi\left(\frac{0{,}5}{0{,}3}\right) \approx 10\%$.

C	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
$\#F_1, \#F_2$	Anzahl der von Inspekteur 1 bzw. Inspekteur 2 gefundenen Fehler.
$\#(F_1 \cap F_2)$	Anzahl von beiden Inspekteuren gefundenen Fehler.
t	Inspektionszeit in Mitarbeiterstunden.
$\#(F_1 \cup F_2)$	Gesamtanzahl der gefundenen Fehler (von beiden Inspekteuren insgesamt).
EFC	Effizienz, gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde.
EFT	Effektivität, gefundenen Fehler je 1000 NLOC.
$\hat{\mu}_{\mathrm{F}}$	Geschätzter Erwartungswerte der Gesamtfehleranzahl.
$\hat{\mu}_{\mathrm{NFD}}$	Geschätzte zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

Aufgabe 5.2: Inspektion als Zufallstest

Die Anzahl der Inspekteure X, die für den Nachweis eines Fehlers erforderlich sind, sei pareto-verteilt mit $K = 0{,}5$:

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left[X \leq x\right] = \mu_{\mathrm{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0{,}5} \quad \text{für } x \geq x_{\min}$$

- Erwartete Fehlerabdeckung mit einem Inspekteur 60%.
- Der erste Inspekteur findet 100 Fehler. Inspektionsdauer je Inspekteur eine Mitarbeiterstunde.

a) *Zusammenhang zwischen der Inspektionsfehlerabdeckung und der Anzahl der Inspekteure?*

Verteilungsfunktion als die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fehler nachweisbar ist, ist gleich der zu erwartenden Fehlerabdeckung:

$$\mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\tfrac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5}$$

Bestimmung von $x_{\min}$:

$$\mu_{\text{FC}}(1) = 60\% = 1 - (x_{\min})^{0,5}$$
$$x_{\min} = 40\%^2 = 0{,}16$$

b) *Erforderliche Anzahl der Inspekteure x für eine zu erwartenden Fehlerabdeckung von 95%?*

Umstellung von

$$\mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\tfrac{0{,}16}{x}\right)^{0,5}$$

nach der Anzahl der Inspekteure:

$$x = \frac{0,16}{(1-\mu_{\text{FC}}(x))^2} = \frac{0,16}{(1-95\%)^2} = 64$$

c) *Zu erwartende Anzahl der von Inspekteur 2 bis 10 gefundenen Fehler und zu erwartende Effizienz der Inspekteure 1 bis 8?*

$$\mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\tfrac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5}$$

Erwartete Gesamtfehleranzahl:

$$\mu_{\text{F}} = \frac{\mu_{\text{DF}}(1)}{1-\mu_{\text{FC}}(1)} = \frac{100\,\text{F}}{40\%} = 250\,\text{F}$$

Zu erwartende Anzahl der je Inspekteur gefundenen Fehler:

$$\mu_{\text{DF}}(x) = \mu_{\text{F}} \cdot (1-\mu_{\text{FC}}(x)) = 250\,\text{F} \cdot \left(\tfrac{0{,}16}{x}\right)^{0,5}$$

Effizienz (Gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde):

$$EFC(x) = (\mu_{\text{DF}}(x) - \mu_{\text{DF}}(x-1))\,/1\,\text{h}$$

Insp.	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_{\text{DF}}(x)$	100	70,7	57,7	50	44,7	40,8	37,8	35,4
$EFC(x)$	100	29,3	13,0	7,7	5,3	3,9	3,0	2,4

$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.
$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
x	Anzahl der Inspekteure.
$\mu_{\text{FC}}(x)$	Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Anzahl der Inspekteure.
$\hat{\mu}_{\text{F}}$	Geschätzter Erwartungswerte der Gesamtfehleranzahl.
[F]	Zählwert in Fehlern.
$\mu_{\text{DF}}(x)$	Erwartete Anzahl nachweisbarer Fehler als Funktion der Anzahl der Inspekteure.
$\mu_{\text{EFC}}(x)$	Zu erwartende Effizienz als Funktion von der Anzahl der Inspekteure.

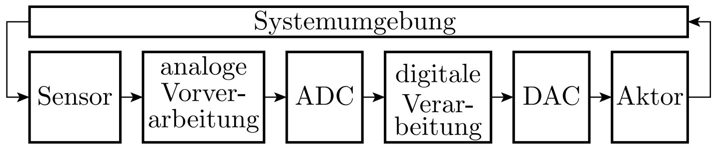
5.2 Dynamische Tests

Aufgabe 5.3: Funktionstest

a) *Vorteile der digitalen gegenüber der analogen Verarbeitung?*

- Fehlertoleranz gegen Störungen, Fertigungsstreuungen, ...(Folie 1.102)
- geringere Fertigungskosten und Entwurfskosten, kleiner, schneller, genauer zuverlässiger.
- Zusätzlicher funktionaler Gestaltungsspielraum (Folie 5.26):
  - Datenspeicherung,
  - sequentielle und SW-gesteuerte Abarbeitung,
  - ...

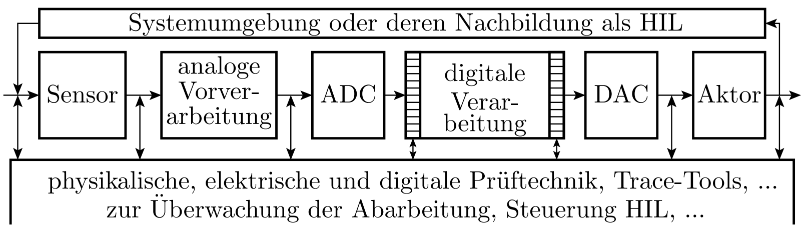
b) *Typische Verarbeitungskette mit physikalischen Ein- und Ausgaben?*



- Sensor, analoge Vorverarbeitung, analog-digital-Wandlung,
- digitale Verarbeitung
  - in der Regel mit Rechnern, durch Software,
  - die Hardware stellt für die SW die Grundfunktionen, zeitkritische Funktionen, ... bereit.
  - Zwischen der HW und der Anwendungs-SW liegt in der Regel noch Schichten: Hardware-Abstraktion, Betriebssystem, ...
- digital-analog-Wandlung,
- analoge Nachbearbeitung, Aktor.

c) *Was bedeutet »Hardware in the Loop« und welche wesentlichen Vorzüge bietet das?*

Nachbildung der Systemumgebung durch eine Attrappe oder Simulation:



Mehr und frühere Testmöglichkeiten, insbesondere

- auch die Reaktion in gefährlichen Situation,
- besseren Einblick in die Interaktion mit physikalischen Prozessen, ...

d) *Was bedeutet Prüfgerechter Entwurf?*

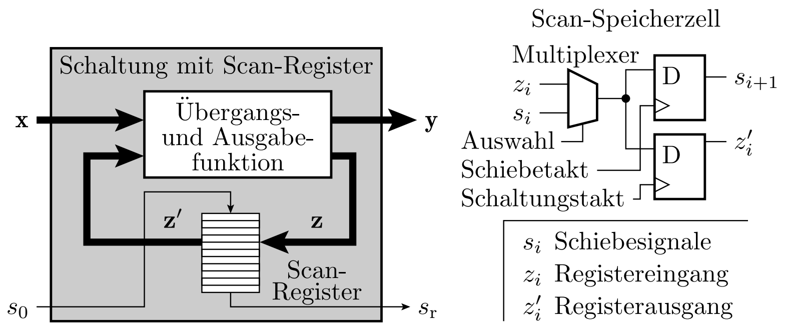
Leitfaden zur vorbeugenden Vermeidung von Testbarkeitsproblemen (Folie 5.33):

- Sammlungen gut funktionierender Lösungen,
- typische Probleme und Workarounds,
- Checklisten, was dabei nicht vergessen werden darf, ...

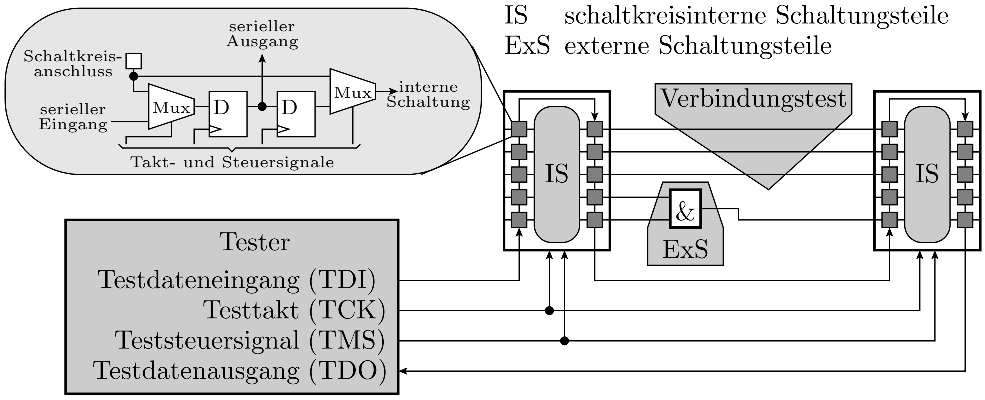
Aufgabe 5.4: Test digitaler Schaltungen

a) *Was sind Scan-Register und was für ein Problem lösen sie?*

Umschaltmöglichkeit interner Speicherelemente in ein seriell les- und beschreibbares Schieberegister, um Speicherzustände während des Tests lesen und schreiben zu können:



b) *Was ist Boundary-Scan und welche Tests unterstützt er?*



- Scan-Registern an den Anschlüssen digitaler Schaltkreise.
- Ermöglicht den isolierten Test der schaltkreisinternen Funktion und Schaltkreisumgebung auf Baugruppen.
- Unterstützt vor allem den Bestückungs- und Verbindungstest auf Baugruppen.

5.3 Fehlererkennende Codes

Aufgabe 5.5: Arithmetischer Code

a) *Bilden Sie für den Bitvektor*

$$x = 110010001000011101_2$$

das fehlererkennende Codewort durch vorzeichenfrei Multiplikation mit der Primzahl $C = 10313$ *(Produktbildung und Konvertierung in einen Binärvektor).*

Mit Octave (Matlab):

```
>> printf('y=0x%x\n',0x3221D*10313)
Ausgabe: y=0x7e394245
```

binär: 0b111.1110.0011.1001.0100.0010.0100.0101

b) *Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung der Kontrolle:*

```
if y%C then <MF-Behandlung>
```

(Divisionsrest ungleich null).

$$\mu_{\mathrm{MC}} = 1 - \frac{\#x}{\#x \cdot C} = 1 - \frac{1}{C} \quad (5.7)$$

$$\boxed{\mu_{\mathrm{MC}} \approx 1 - \frac{1}{10313} = 99{,}990\%}$$

c) *Werden mit dem gewählten Code Verfälschung von y erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?*

Division die Bildung des Divisionsrests sind lineare Operationen. Der Divisionsrest der Summe (Wert plus Verfälschung) ist die Summe der Divisionsreste. Verfälschung erkennbar, wenn nicht ohne Rest durch C teilbar. Divisionsrest für »3 und 14 invertiert«:

$$0\mathrm{b}100\,0000\,0000\,1000\,\%\,1031 = 16.392\,\%\,10313 = 6.097 \neq 0$$

Verfälschungen, die die Bits 3 und 14 invertieren, werden immer erkannt.

C Große ganzzahlige Konstante, bevorzugt eine Primzahl.
x, y Zu verschlüsselndes Datenwort, Verschüsseltes Datenwort.
$\#x$, % Anzahl der darstellbaren Code-Worte, Divisionsrest.
μ_{MC} Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung.

5.4 Prüfkennzeichen

Aufgabe 5.6: Prüfsummen

Gegeben sind die korrekte und drei verfälschte Bytefolgen:

```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

a) *Bilden Sie die Prüfsummen durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge.*

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13		0x13		0x13		0x13	
0xF2		0x33		0xF2		0xF1	
0x33		0xF2		0x37		0x90	
0xE6		0xE6		0xE6		0x56	

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13
0xF2	0x05	0x33	0x46	0xF2	0x05	0xF1	0x04
0x33	0x38	0xF2	0x38	0x37	0x3C	0x90	0x94
0xE6	0x1E	0xE6	0x1E	0xE6	0x22	0x56	0xEA

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytvertauschung von F1 nicht.

b) *Bilden Sie die Prüfsummen durch durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.*

Wert
0x13
0xF2
0x33
0xE6
⊕:

⊕ – b

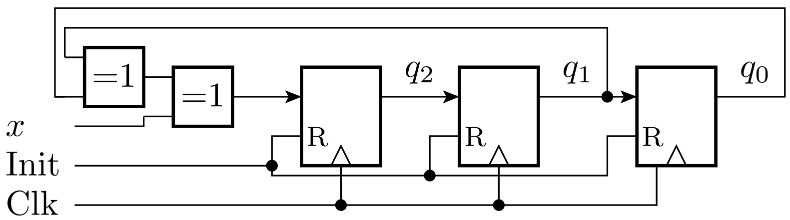
An welche der beiden Prüfsummen sind die drei vorgegebenen Datenverfälschungen erkennbar?

Wert	binär	Wert F1	binär	Wert F2	binär	Wert F3	binär
0x13	0001 0011	0x13	0001 0011	0x13	0001 0011	0x13	0001 0011
0xF2	1111 0010	0x33	0011 0011	0xF2	1111 0010	0xF1	1111 0001
0x33	0011 0011	0xF2	1111 0010	0x37	0011 0111	0x90	1001 0000
0xE6	1110 0110	0xE6	1110 0110	0xE6	1110 0110	0x56	0101 0110
⊕:	0011 0100		00110100		0011 0000		0010 0100

⊕ – bitweise Exor

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytvertauschung von F1 nicht.

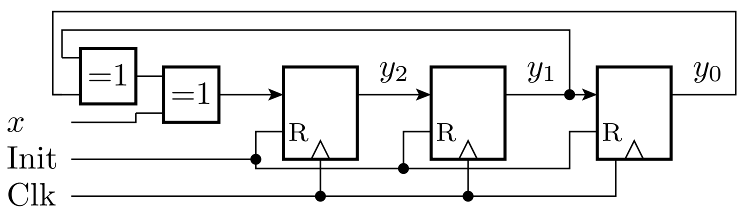
Aufgabe 5.7: Prüfkennzeichen mit LFSR



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
...	...			

PKZ:

a) *Auf welches Prüfkennzeichen* $\mathbf{y} = y_2y_1y_0$ *wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet? Füllen Sie dazu die Tabelle in der Abbildung aus.*



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	0	0	0
7	1	1	0	0
8	0	1	1	0
9	1	1	1	1
10	0	1	1	1
11	0	0	1	1
12	1	0	0	1
13	0	0	0	0
14	1	0	0	0
15	0	1	0	0
PKZ:		0	1	0

b) *Wie groß ist die zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung* μ_{FC}*?*

$$\mu_{\mathrm{MC}} \geq 1 - 2^{-r} \tag{1.35}$$

$$\boxed{\mu_{\mathrm{FC}} = 1 - 2^{-3} = 87{,}5\%}$$

---

x_i	Originalbits vor der Umwandlung in einen fehlererkennenden Code.
g_i	Bitstellen des Generatorpolynoms zur Multiplikation mit der Originalbitfolge.
r	Bitanzahl des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
q_i	Registerbit i des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
Init	Initialisierungssignal.
Clk	Taktsignal (Clock signal).
μ_{MC}	Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung.

5.5 Fehlerkorrig. Codes

Aufgabe 5.8: Kreuzparität

```
           Zeilenparität
1011001001101000 [ ]
1100001110010011 [ ]
0110010010101101 [ ]
1000100001100101 [ ]
1101001011010011 [ ]
1101000010011110 [ ]
1010011000010101 [ ]
1011010010100110 [ ]
[ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ]
        Spaltenparität
```

a) *Ergänzen Sie Bitwerte für die Zeilen- und Speltenparität?*

```
           Zeilenparität
1011001001101000 1
1100001110010011 0
0110010010101101 0
1000100001100101 0
1101001011010011 1
1101000010011110 0
1010011000010101 1
1011010010100110 0
1000110111100111
        Spaltenparität
```

b) *Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?*

Die Invertierung des rot unterlegten Bits ist an einem Paritätsfehler in Zeile 6 und in Spalte 7 zu erkennen.

Aufgabe 5.9: (8,12)-Hamming-Code

b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0

$$q_0 = x_0 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \qquad q_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7$$
$$q_1 = x_0 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \qquad q_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$$

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0
Kontrollbits	=	≡	=	=	−	≡	=	=	−	=	−	−

a) *Bilden Sie die Codeworte für die darzustellenden Werte: $w_1 = 0x73$, $w_2 = 0x1D$ und $w_3 = 0xD6$?*

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits	=	≡	=	=	−	≡	=	=	−	=	−	−	
$\mathbf{x}_1 = $ 0x73													$\mathbf{b}_1$=0x
$\mathbf{x}_2 = $ 0x1D													$\mathbf{b}_2$=0x
$\mathbf{x}_3 = $ 0xD6													$\mathbf{b}_3$=0x

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits	=	≡	=	=	−	≡	=	=	−	=	−	−	
$\mathbf{x}_1 = $ 0x73	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	$\mathbf{b}_1$= 0x79E
$\mathbf{x}_2 = $ 0x1D	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	$\mathbf{b}_2$= 0x1E7
$\mathbf{x}_3 = $ 0xD6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	$\mathbf{b}_3$= 0xDB9

b) *Bestimmen Sie für die Codeworten $c_4 = 0xA24$, $c_5 = 0x5D6$ und $c_6 = 0x141$, ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?*

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits	=	≡	=	=	−	≡	=	=	−	=	−	−	
$\mathbf{b}_4 = $ 0xA24													$\Delta\mathbf{q}_4$:
$\mathbf{b}_5 = $ 0x5D6													$\Delta\mathbf{q}_5$:
$\mathbf{b}_6 = $ 0x141													$\Delta\mathbf{q}_6$:

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits	=	≡	=	=	−	≡	=	=	−	=	−	−	
$\mathbf{b}_4 = $ 0xA24	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\Delta\mathbf{q}_4 = 3$
$\mathbf{b}_5 = $ 0x5D6	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	$\Delta\mathbf{q}_5 = 9$
$\mathbf{b}_6 = $ 0x141	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	$\Delta\mathbf{q}_6 = 15$

verfälschtes Bit

x_4: 0b10100101 = 0xA5
x_5: 0b01010011 = 0x58
x_6: nicht korrigierbar

5.6 Syntaxtest

Aufgabe 5.10: Kontrollautomat

Ein (vereinfachter) Rechnerbefehlssatz besteht aus vier verschiedenen Befehlstypen:

```
add␣rr,rr;
addi␣rr,imm8;
sub␣rr,rr;
subi␣rr,imm8;
```

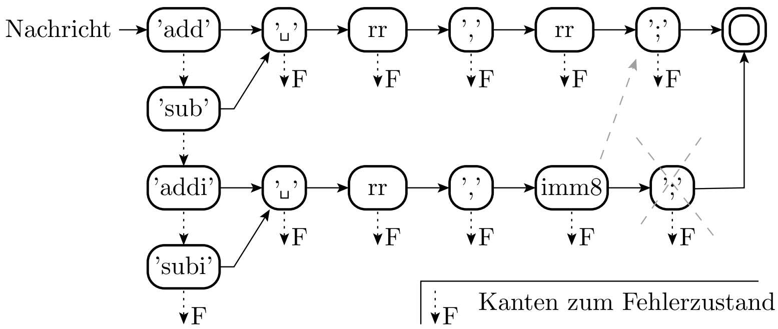
␣ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ('r0', 'r1', ... 'r31'); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ('0x00', '0x01', ..., '0xFF'; '0x' gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit Zifferenwerten '0' bis 'F').

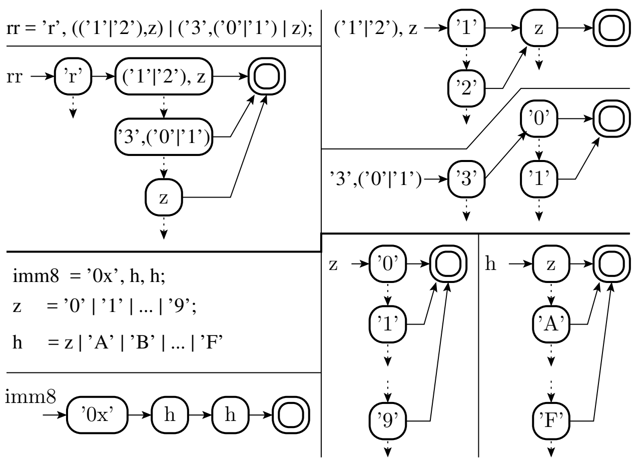
a) *Beschreiben Sie das Befehlsformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.?*

```
Befehl = (('add' | 'sub'), '␣', rr, ',', rr,   ';') |
         ('addi'| 'subi','␣', rr, ',', imm8, ';');
rr     = 'r', (('1'|'2'),z) | ('3',('0'|'1') | z);

imm8   = '0x', h, h; z      = '0' | '1' | ... | '9';
h      = z | 'A' | 'B' | ... | 'F';
```

b) *Entwerfen Sie einen deterministischen Kontrollautomaten auf Syntaxfehler als Graph für einen Moore-Automaten.*

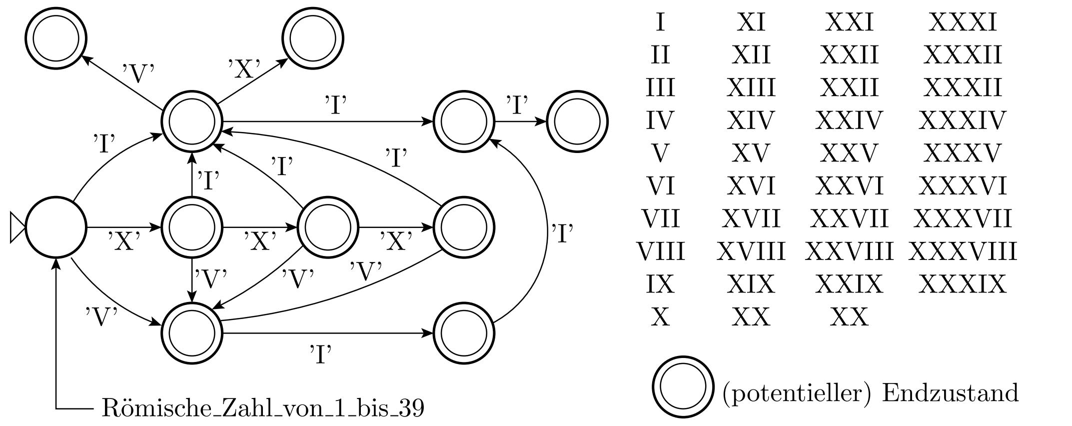




Aufgabe 5.11: Syntaxtest für römische Zahlen

Entwerfen Sie einen Mealy-Kontrollautomaten (Abräumen der Zeichen an den Kanten) für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39.

Wert		Wert		Wert		Wert	
1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX		



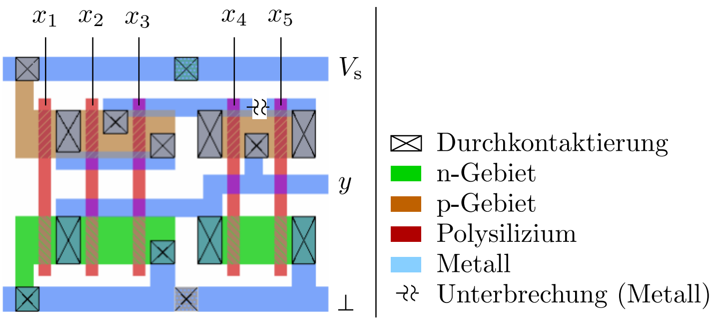
Bei allen Eingaben, für die keine Kante gezeichnet ist, Übergang in den Fehlerzustand.

6 Hardware

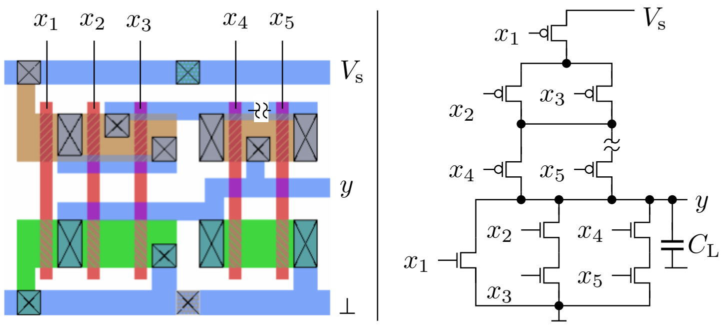
6.1 Fehlermodellierung

Aufgabe 6.1: Stuck-Open-Fehlerl

Gegeben ist ein Gatter-Layout mit einer unterbrochenen Metallverbindung zum Source des PMOS-Transistors am Eingang x_5:



a) *Gatterschaltung mit eingezeichneter Unterbrechung?*



Die Lastkapazität C_L speichert den logischen Wert, wenn der Ausgang y weder mit V_S (log. 1) noch mit $\perp$ (log. 0) verbunden ist.

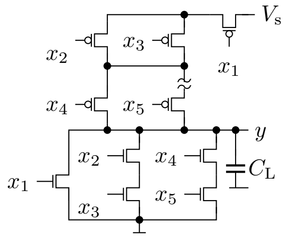
b) *2-Pattern-Test für den Fehlernachweis?*

Mit der Unterbrechung kann Ausgang y nicht über den PMOS-Transistor an x_5 aufgeladen werden. Das Anregungspattern muss die Lastkapazität C_L entladen. Bedingung:

$$x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_4 x_5$$

Das Nachweispattern muss C_L ohne Fehler über PMOS-Transistor an x_5 aufgeladen. Bedingung:

$$\bar{x}_1 \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5$$



	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
A	*	*	*	*	1
N	0	1	0	*	0

A Anregungs-Pattern
N Nachweis-Pattern

6.2 Ausfälle

Aufgabe 6.2: Ausfallrate und mittlere Lebensdauer

Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit je einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit je einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit je einer Ausfallrate von 0,5 fit?

(6.4) $$\lambda_{\text{Sys}} = \sum_{i=1}^{\#Prt} \lambda_i$$

(6.3) $$\bar{t}_{\text{FL}} = \mu_{\text{L}} = \int_0^\infty V(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

Die Ausfallraten addieren sich. Gesamtausfallrate:

$$\lambda_{\text{Sys}} = 30 \cdot 150\,\text{fit} + 100 \cdot 30\,\text{fit} + 500 \cdot 0{,}5\,\text{fit} = 7750\,\text{fit}$$

Zu erwartende Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$\mu_{\text{L.Sys}} = \frac{1}{\lambda_{\text{Sys}}} = \frac{1}{7750 \cdot 10^{-9}\,\text{h}^{-1}} = 129 \cdot 10^3\,\text{h} = 14{,}7\,\text{Jahre}$$

fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.
λ_{Sys}	Ausfallrate des Systems.
$\#C$	Anzahl der für das Funktionieren erforderlichen Bausteine.
λ_i	Ausfallrate Komponente i.
μ_{L}	Zu erwartende Lebensdauer.

Aufgabe 6.3: Verteilung der Lebensdauer

Bei einem redundanten System aus dem aktivem System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten haben alle vier Komponenten eine exponentialverteilte Lebensdauer L_{K} mit derselben Ausfallrate λ_{K}.

Aktive $+4\times$ kalte Reserve mit $L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, Lösungshinweise: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$ und

a) *Was für eine Verteilung hat die Lebensdauer L_{Sys} des Gesamtsystems?*

Eine Exponentionverteilung mit dem Verteilungsparameter λ ist eine Gamma-Verteilung mit Formfaktor $\alpha = 1$ und Skalenparameter $\beta = \lambda$:

$$L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$$

Ein System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten hat die viefache Lebensdauer. Bei gleichen Skalenparametern addieren sich die Formfaktoren:

$$L_{\mathrm{Sys}} = 4 \cdot L_{\mathrm{K}} \sim \mathcal{G}(4, \lambda)$$

b) *Welche Dichtefunktionen haben die Lebensdauern der Komponenten und die Lebensdauer des Gesamtsystems?*

Exponentialverteilte Dichte der Lebensdauern der Komponenten:

$$f_{\mathrm{LK}}(t) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

Gamma-verteilte Dichte der Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$f_{\mathrm{LSys}}(t) = \frac{\lambda^4}{\Gamma(4)} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3 = \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3$$

c) *Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Lebensdauer des Gesamtsystems?*

$$\mathrm{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} \quad (4.9)$$

$$\mu_{\mathrm{LSys}} = \frac{4}{\lambda}$$
$$\sigma^2_{\mathrm{LSys}} = \frac{4}{\lambda^2}$$
$$\sigma_{\mathrm{LSys}} = \frac{2}{\lambda}$$

Die Lebensdauer des Gesamtsystems hat den vierfachen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung der der Komponenten.

L_{K}	Lebensdauer einer einzelnen Komponente, Zufallsvariable.
λ_{K}	Ausfallrate einer einzelnen Komponente.
$L\mathrm{Sys}$	Lebensdauer des Gesamtsystem, Zufallsvariable.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	Exponentialverteilung, λ – Verteilungsparameter.
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma-Verteilung, α – Formparameter, β – Skalenparameter.
$\Gamma(\ldots)$	Gamma-Funktion.
t	Lebensdauer.
μ, σ	Erwartungswert, Standardabweichung.

Aufgabe 6.4: Ausfallrate von Glühlampen

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

a) *Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?*

Mittlere Ausfallrate an den ersten 18 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{400\,\text{Ausfälle}}{10.000\,\text{Objekte}\cdot 18\,\text{Tage}\cdot 24\,\frac{\text{h}}{\text{Tag}}} = 9{,}26\cdot 10^{-5}\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 92.600\,\text{fit}$$

b) *Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?*

Ausfallrate am 19 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{5\,\text{Ausfälle}}{9.600\,\text{Objekte}\cdot 24\,\text{h}} = 2{,}17\cdot 10^{-5}\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 21.700\,\text{fit}$$

Das ist eine signifikate Abnahme, die darauf schließen lässt, dass sich die Glühlampen noch in der Frühphase befinden, in der die Ausfallrate mit der Nutzungsdauer abnimmt.

λ	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.

Aufgabe 6.5: Dauerbetrieb oder Ausschalten

Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate $\lambda = 9000$ fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\text{FSO}} = 10^{-5}$ ausfällt.

Ab welcher Ausschaltdauer t_{off} erhöht Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?

$$V(t) = \mathrm{e}^{-\lambda\cdot t} \tag{6.1}$$

Die gesuchte Ausschaltdauer t_{off} ist die Zeit, ab der die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im normalen Betrieb größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit p_{FSO} beim Einschalten ist:

$$\begin{aligned} 1 - V(t_{\text{off}}) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\cdot t_{\text{off}}} < p_{\text{FSO}} \\ t_{\text{off}} &> -\frac{\ln(1-p_{\text{FSO}})}{\lambda} = -\frac{\ln(1-0{,}01\%)}{9000\cdot 10^{-9}\text{h}^{-1}} \approx 11\,\text{h} \end{aligned}$$

λ	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.
p_{FSO}	Ausfallwahrscheinlichkeit beim Einschalten.
$t$off	Ausschaltdauer.
$V(t_{\text{off}})$	Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn das System für t_{off} eingeschaltetet bleibt.

Aufgabe 6.6: Voralterung

a) *Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?*

Voralterung erhöht die Ausfallrate auch für die potentiellen Schwachstellen, die Frühausfälle verursachen. Die kränklichen Bauteile sterben und werden vor dem Einsatz ersetzt. Unter normalen Betriebsbedingungen ist die Ausfallrate vorgealterter Bauteile geringer und die mittlere Lebensdauer höher.

b) *Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre?*

Der übertaktete Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung ist eine Voralterung. Es überleben die 10
Systeme ohne Kinderkrankheiten. Die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre ist unter Normalbedingungen (ohne Übertaktung) geringer.

c) *Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?*

In der Hauptnutzungsphase erhöht sich während des übertakteten Betriebs mit erhöhter Betriebsspannung die Ausfallrate und ist ohne Übertaktung wieder normal. Die Ermüdungsphase, in der die Ausfallrate zunimmt, wird aber eher erreicht. Wenn ein Zeitintervall nach der Übertaktung und vor Beginn der Ermüdungsphase betrachtet wird, erhöht die Übertaktung die zu erwartende Lebensdauer der am Anfang des Betrachtungszeitraums noch lebenden Systeme.

---

7 Software

8 Sonstiges

8.1 Gamma- und Exponentialvert.

Aufgabe 8.1: Modell von Musa, Goel und Okumoto

Das am häufigsten zitierte Zuverlässigkeitswachstumsmodell ist das von Musa, Goel und Okumoto (MGO-Modell*). Es unterstellt für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht beseitigten Fehler und der Nachweiszeit t eine abklingende e-Funktion:

$$\mu_{\mathrm{F}}(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

a) *Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit T unterstellt?*

Die Verteilung der Nachweiszeit T als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler spätestens nach einer Testdauer t nachgewiesen wird, ist die zu erwartende Fehlerabdeckung:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mu_{\mathrm{FC}}(t)$$

Mit

$$\mu_{\mathrm{FC}}(t) = 1 - \frac{\mu_{\mathrm{F}}(t)}{\mu_{\mathrm{F}}(t=0)} = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$
$$F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$

Für die Nachweiszeit unterstellt das MGO-Modell statt einer Pareto-Verteilung eine Exponentialverteilung mit $\lambda = b$.

b) *Was für eine Dichtefunktion wird für die MF-Rate unterstellt?*

Mit
$$\mu_{\mathrm{FC}}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$
aus Aufgabenteil a und $N - N_0 = \frac{t}{MTS}$:
$$1 - \mu_{\mathrm{FC}}(t) = \mathrm{e}^{-bt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{\zeta \cdot t}{MTS}} \cdot h(\zeta) \cdot \mathrm{d}\zeta$$
Anschauliche Lösung:
$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \zeta = b \cdot MTS \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Das MGO-Modell unterstellt für alle Fehler dieselbe Fehlfunktionsrate.

μ_{F} Zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
a, b Experimentell abzuschätzende Modellparameter.
t Testzeit.
T Nachweiszeit, Zufallsvariable.
* Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement, 2003.
λ Parameter der Exponentialverteilung.

Aufgabe 8.2: Fehleranzahl und Zuverlässigkeit

Ein Testobjekt hat nach Beseitigung aller mit $N_1 = 10^2$ Tests erkennbaren Fehler abschätzungsweise noch 100 Fehler. Pareto-verteilte Nachweislänge mit Formfaktor $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \dots\ 0{,}7\}$.

$N_1 = 100$, $\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = 100$, $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \dots\ 0{,}7\}$.

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 10^{-K}$$
$$\mu_{\mathrm{F}}(N_3) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 100^{-K}$$

	$K = 0{,}3$	$K = 0{,}4$	$K = 0{,}5$	$K = 0{,}6$	$K = 0{,}7$
$\mu_{\mathrm{F}}(N_2)$	50,1	39,8	31,6	25,1	20,0
$\mu_{\mathrm{F}}(N_3)$	25,1	15,8	10,0	6,3	4,0

b) *Wie groß ist die zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

$$R_{\mathrm{F}}(N_2) = \frac{N_2}{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N_2)} = \frac{1.000}{K \cdot 100 \cdot 10^{-K}} = \frac{10 \cdot 10^K}{K} = \frac{10^{1+K}}{K}$$
$$R_{\mathrm{F}}(N_3) = \frac{N_3}{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N_3)} = \frac{10.000}{K \cdot 100 \cdot 100^{-K}} = \frac{100 \cdot 100^K}{K} = \frac{100^{1+K}}{K}$$

	$K = 0{,}3$	$K = 0{,}4$	$K = 0{,}5$	$K = 0{,}6$	$K = 0{,}7$
$R_{\mathrm{F}}(N_2)$	66,5	62,8	63,2	66,4	71,6
$R_{\mathrm{F}}(N_3)$	1330	1580	2000	2640	3590

N Anzahl der Tests.
$\mu_{\mathrm{F}}(N)$ Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$K > 0$ Formfaktor der Pareto-Verteilung.

$R_{\mathrm{F}}(N)$ Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehler.

Aufgabe 8.3: Fehleranzahl und MF-Rate

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert N_1 auf $N_2 = 2 \cdot N_1$ hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

a) *Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber N_1 ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler pareto-verteilt ist, erforderlich, um die MF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?*

(2.24) $$K = \log\left(\frac{\zeta_F(N_1)}{\zeta_F(N_2)}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right) - 1$$

(2.22) $$\zeta_F(N_2) \overset{(\le 1)}{=} \zeta_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-(K+1)}$$

Formfaktor der Verteilung der MF-Rate bzw. der Nachweislänge:

$$K = -\frac{\log(1/3)}{\log(2)} - 1 = 0{,}585$$

Erforderliche Vergrößerung der effektiven Testanzahl:

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{\zeta_F(N_2)}{\zeta_F(N_1)}\right)^{-\frac{1}{K+1}} = 100^{\frac{1}{1{,}585}} = 18{,}3$$

b) *Um welchen Faktor verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der Testsatzverlängerung aus Aufgabenteil a?*

$$\frac{\mu_F(N_2)}{\mu_F(N_1)} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 18{,}3^{-0{,}585} = 18{,}27\%\cdot$$

N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
K	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ($0 < K < 1$).
ζ_F	Fehlfunktionsrate durch Fehler.
$\mu_F(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.