Test und Verlässlichkeit Grosse Übung

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV_GU1)

16. Januar 2024

Inhalt Große Übung

Threads & Means

Verlässlichkeit

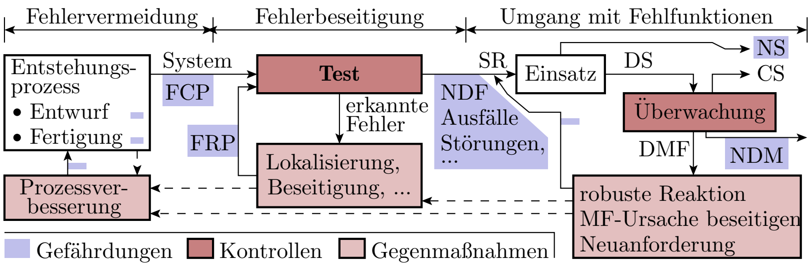
Aufgabe 1.1: Verlässlichkeit, Service-Modell

a) *Auf welchen drei Ebenen erfolgt die Sicherung der Verlässlichkeit?*

b) *Ein Modell in der Informatik hebt die wesentlichen Aspekte hervor und vernachlässigt unwesentliche Details. Was sind wesentliche Aspekte und was sind vernachlässigte unwesentliche Details das Service-Modells?*

c) *Auf was für Systemtypen ist das Service-Modell anwendbar?*

a) *Auf welchen drei Ebenen erfolgt die Sicherung der Verlässlichkeit?*



Ebenen zur Sicherung der Verlässlichkeit:

- Fehlervermeidung durch Verbesserung der Entstehungsprozesse.
- Test und Fehlerbeseitigung.
- Überwachung und geeignete Reaktion auf erkannte MF.

FCP Fehler, die während Entstehungsprozess entstanden sind.
RPF Fehler, die bei der Fehlerbeseitigung entstanden sind.

b) *Ein Modell in der Informatik hebt die wesentlichen Aspekte hervor und vernachlässigt unwesentliche Details. Was sind wesentliche Aspekte und was sind vernachlässigte unwesentliche Details das Service-Modells?*

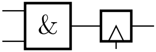
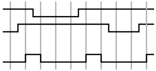
Anforderung (SR) + Eingabe → Service → Ausgabe: NS, DS: CS oder MF

Wesentlich: Abzählbare Anzahl SR, DS, CS, NS, MF.
Vernachlässigte Details: Funktion, Realisierung.

Das erlaubt, die gewünschten und erbrachten Leistungen sowie die dabei aufgetretenen Probleme zu zählen und zur Bewertung der Verlässlichkeit ins Verhältnis zu einander zu setzen.

SR	Service-Anforderung.
NS	Keine Service-Leistung.
DS	Erbrachte Service-Leistung.
CS	Korrekte Service-Leistung.
MF	Fehlfunktion.

c) *Auf was für Systemtypen ist das Service-Modell anwendbar?*

getaktete Digitalschaltung		E: A: 

Programm mit EVA-Struktur	`uint8_t up(uint8_t a){`
	`  return 23 * a;`
	`}`
		E: 10 101 ...
		A: 320 19 ...

Server	E: z.B. eine Datenbankanfrage A: Ergebnisdatensatz	
Fertigungsprozess	E: Fertigungsauftrag, Material, ... A: gefertigtes Produkt	
Entwurfsprozess	E: Entwurfsauftrag A: Entwurf	

Anwendbar auf alle Systeme, die auf Anforderung aus Eingaben Ausgaben erzeugen: Hardware, Software, Mechatronische Systeme, Entwurfsprozesse, Fertigungsprozesse incl. der für die Hardware, ...

E, A Eingabe, Ausgabe.

Aufgabe 1.2: Verfügbarkeit, mittlere Reparaturzeit

Eine Steuerung mit einer mittleren Zeit zwischen den Fehlfunktionen von zwei Jahren soll eine Verfügbarkeit von $1-10^{-6}$ haben. In 99% der Fälle startet das System ohne Reparatur und Korrektur automatisch neu und ist nach 30 s wieder betriebsbereit und in 1% der Fälle muss zusätzlich die Steuerung getauscht werden. Andere Aspekte der Nichtverfügbarkeit bleiben unbeachtet.

$MTBM = 2\,\text{Jahre}$, $A \geq 1-10^{-6}$, 99% der MF System-MT mit $MTST = 30\,\text{s}$, 1% der MF durch Ausfall. Weitere $A_{\ldots} = 1$.

a) *Wie groß sind die mittleren Zeit zwischen vom System automatisch behandelten MF und die MT-Verfügbarkeit?*

b) *Wie groß sind die mittlere Zeit zwischen Ausfällen und die erforderliche ausfallbezogene Verfügbarkeit?*

c) *Max. mittlere Zeit für den Tausch der Steuerung?*

d) *Kontrollieren Sie das Ergebnis durch Berechnung der gesamten Verfügbarkeit aus der mittleren Zeit zwischen Fehlfunktionen und der mittleren Zeit für die Fehlfunktionsbehandlung insgesamt.*

$MTBM = 2\,\text{Jahre}$, $A \geq 1-10^{-6}$, 99% der MF System-MT mit $MTST = 30\,\text{s}$, 1% der MF durch Ausfall. Weitere $A_{\dots} = 1$.

a) *Wie groß sind die mittleren Zeit zwischen vom System automatisch behandelten MF und die MT-Verfügbarkeit?*

$$A_{\text{MT}} = \frac{MTBT}{MTBT+(MTB+\mu_{\text{CM}}\cdot MTS)} \tag{1.4}$$

$$MTBT = \frac{MTBM}{99\%} = \frac{2\,\text{Jahre}\cdot 365\,\frac{\text{Tage}}{\text{Jahr}}\cdot 24\,\frac{\text{h}}{\text{Tag}}\cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}}}{99\%} = 6{,}37\cdot 10^7\,\text{s}$$

$$MTST = 30\,\text{s}\,[= MTB + \mu_{\text{CM}}\cdot MTS]$$

$$A_{\text{MT}} = \frac{6{,}37\cdot 10^6\,\text{s}}{6{,}37\cdot 10^6\,\text{s}+30\,\text{s}} = 1-4{,}71\cdot 10^{-7}$$

$MTBM$	Mittlere Nutzungsdauer zwischen Fehlfunktion (Mean service life between malfunctions).
$MTST$	Mittlere Zeit der Fehlfunktionsbehandlungen durch das System insgesamt.
A_{MT}	MT-Verfügbarkeit, Zeitanteil, den das System nicht mit MT beschäftigt ist.
$MTBT$	Mittlere Zeit zwischen MF-Behandlungen ohne Reparatur.
MTB	Mittlere Zeit für die grundlegende Fehlfunktionsbehandlung.
μ_{CM}	Mittlere Anzahl der Neuberechnungen (Korrekturversuche) je MF.
MTS	Mittlere Service-Dauer (Mean time to service).

$MTBM = 2\,\mathrm{Jahre}$, $A \geq 1 - 10^{-6}$, 99% der MF System-MT mit $MTST = 30\,\mathrm{s}$, 1% der MF durch Ausfall. Weitere $A_{\dots} = 1$.

b) *Wie groß sind die mittlere Zeit zwischen Ausfällen und die erforderliche ausfallbezogene Verfügbarkeit?*

$$A = A_{\mathrm{NS}} + A_{\mathrm{MT}} + A_{\mathrm{F}} + A_{\mathrm{PWA}} - 3 \tag{1.6}$$

Mittlere Zeit zwischen Ausfällen:

$$MTBF = \frac{MTBM}{1\%} = \frac{2\,\mathrm{Jahre} \cdot 365\,\frac{\mathrm{Tage}}{\mathrm{Jahr}} \cdot 24\,\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{Tag}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}}}{1\%} = 6{,}31 \cdot 10^9\,\mathrm{s}$$

Nur A_{F} und A_{MT} in Gl. 1.6 sind < 1:

$$A_{\mathrm{F}} = A - A_{\mathrm{MT}} + 1 = 1 - \left(10^{-6} - 4{,}71 \cdot 10^{-7}\right) = 1 - 5{,}29 \cdot 10^{-7}$$

$MTBF$	Mittlere Zeit zwischen zwei Ausfällen (Mean time between failures).
A	Verfügbarkeit (Availability).
A_{DS}	Lieferverfügbarkeit.
A_{F}	F-Verfügbarkeit, Zeitanteil, den das System ausfallbedingt unbenutzbar ist.
A_{PWA}	PWA-Verfügbarkeit, Zeitanteil, in den Nutzer nicht mit Problemumgehungen beschäftigt.

$MTBM = 2\,\mathrm{Jahre}$, $A \geq 1 - 10^{-6}$, 99% der MF System-MT mit $MTST = 30\,\mathrm{s}$, 1% der MF durch Ausfall. Weitere $A_{\dots} = 1$.

c) *Max. mittlere Zeit für den Tausch der Steuerung?*

$$A_{\mathrm{F}} = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \tag{1.5}$$

Zulässige mittlere Reparaturdauer:

$$MTTR = \frac{MTBF \cdot (1 - A_{\mathrm{F}})}{A_{\mathrm{F}}} = \frac{6{,}37 \cdot 10^{8}\,\mathrm{s} \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-7}}{1 - 5{,}29 \cdot 10^{-7}} = 3337\,\mathrm{s}$$

Tausch der Steuerung darf im Mittel weniger als eine Stunde dauern.

$MTTR$ Mittlere Reparaturzeit (Mean time to repair).

$MTBM = 2\,\text{Jahre}$, $A \geq 1-10^{-6}$, 99% der MF System-MT mit $MTST = 30\,\text{s}$, 1% der MF durch Ausfall. Weitere $A_{\dots} = 1$.

d) *Kontrollieren Sie das Ergebnis durch Berechnung der gesamten Verfügbarkeit aus der mittleren Zeit zwischen Fehlfunktionen und der mittleren Zeit für die Fehlfunktionsbehandlung insgesamt.*

$$A = \frac{MTBM}{MTBM+MTMT} \tag{1.1}$$

$$MTBM = 2\,\text{Jahre} \cdot 365\,\frac{\text{Tage}}{\text{Jahr}} \cdot 24\,\frac{\text{h}}{\text{Tag}} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}} = 6{,}31 \cdot 10^7\,\text{s}$$

Mittlere Zeit für die Fehlfunktionsbehandlung:

$$MTMT = 99\% * 30\text{s} + 1\% \cdot 3337\,\text{s} = 36{,}1\,\text{s}$$

Verfügbarkeit insgesamt:

$$A = \frac{6{,}31 \cdot 10^7\,\text{s}}{6{,}31 \cdot 10^7\,\text{s} + 36{,}1\,\text{s}} = 1 - 10^{-6} \surd$$

$MTMT$ Mittlere Dauer der Fehlfunktionsbehandlung.

Aufgabe 1.3: Transistorausfall

Durch den Ausfall eines Tranistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von $\zeta_1 = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ auf $\zeta_2 = 10^{-4}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$.

a) *Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?*

b) *Welche MF-Rate verursacht der ausgefallene Transistor?*

ζ	Fehlfunktionsrate.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Durch den Ausfall eines Tranistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von $\zeta_1 = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ auf $\zeta_2 = 10^{-4}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$.

a) *Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?*

$$R = 1/\zeta \tag{1.11}$$

Vor dem Ausfall:

$$R_1 = \frac{1}{10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^5\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Nach dem Ausfall:

$$R_2 = \frac{1}{10^{-4}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^4\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

R	Zuverlässigkeit (Reliability).
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Durch den Ausfall eines Tranistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von $\zeta_1 = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ auf $\zeta_2 = 10^{-4}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$.

b) *Welche MF-Rate verursacht der ausgefallene Transistor?*

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\#MFC} \zeta_i \tag{1.12}$$

MF-Rate des ausgefallenen Transistors:

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= \zeta_1 + \zeta_{\mathrm{Tr}}\\ \zeta_{\mathrm{Tr}} &= \zeta_2 - \zeta_1\\ &= 10^{-4}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] - 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] = 9\cdot 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]\end{aligned}$$

ζ	Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).
$\#MFC$	Anzahl MF-Klassen, hier MF durch ausgefallenen Transistor und MF durch andere Fehler.
ζ_i	MF-Rate der MF-Klasse i (MF rate of MF class i).
ζ_{Tr}	Fehlfunktionsrate verursacht durch den ausgefallenen Transistor.

Aufgabe 1.4: Zuverlässigkeit Gesamtsystem

Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Fest-platte	Stromver-sorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	R_{R}	R_{Disc}	R_{Power}	R_{others}
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

Die Anzahl zeitgleicher MF durch mehrere Teilsysteme und die Anzahl der MF eines Teilsystems ohne Gesamt-MF seien vernachlässigbar.

a) *Welche Zuverlässigkeit hat das Gesamtsystem?*

b) *Welche MF-Rate hat das Gesamtsystem?*

$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Fest-platte	Stromver-sorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	R_{R}	R_{Disc}	R_{Power}	R_{others}
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

a) *Welche Zuverlässigkeit hat das Gesamtsystem?*

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{\#MFC} \frac{1}{R_i} \tag{1.13}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{700} + \frac{1}{2000}} = 203 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}$$

R Gesamtzuverlässigkeit (Total reliability).
$\#MFC$ Anzahl der MF-Klassen (Number of malfunction classes).
R_i Teilzuverlässigkeit (partitial reliability) von MF-Klasse i.

Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Fest-platte	Stromver-sorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	R_{R}	R_{Disc}	R_{Power}	R_{others}
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

b) *Welche MF-Rate hat das Gesamtsystem?*

$$R = 1/\zeta \tag{1.11}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{1}{203\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]} = 4{,}93 \cdot 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]}$$

ζ Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Aufgabe 1.5: Zuverlässigkeit und Betriebssicherheit

Bei einem IT-System mit einer mittleren Zeit bis zur nächsten Fehlfunktionen von 10^3 Stunden gefährdet im Mittel jede hundertste Fehlfunktion die Betriebssicherheit. Mittlere Service-Dauer $1\,\mathrm{h}$.

$$MTBM = 10^3\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SE}} = 10^{-2}\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right],\ MTS = 1\,\mathrm{h}$$

a) *Fehlfunktionsrate und Zuverlässigkeit?*

b) *Welche Betriebssicherheit hat das System?*

$MTBM$	Mittlere Nutzungsdauer zwischen Fehlfunktion (Mean service life between malfunctions).
η_{SE}	Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen.
MTS	Mittlere Service-Dauer (Mean time to service).
$\left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$	Verhältnis in sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen je Fehlfunktion.

$MTBM = 10^3\,\mathrm{h}$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 10^{-2}\,\left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$, $MTS = 1\,\mathrm{h}$

a) *Fehlfunktionsrate und Zuverlässigkeit?*

$$\zeta = \frac{MTS}{MTBM} \tag{1.8}$$

$$R = \frac{MTBM}{MTS} \tag{1.10}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\zeta = \frac{1\,\mathrm{h}}{10^3\,\mathrm{h}} = 10^{-3}\,\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]\\ R = 1/\zeta = 10^3\,\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]\end{gathered}}$$

ζ	Fehlfunktionsrate.
R	Zuverlässigkeit (Reliability).
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

$$MTBM = 10^3\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SE}} = 10^{-2}\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right],\ MTS = 1\,\mathrm{h}$$

b) *Welche Betriebssicherheit hat das System?*

$$S = \frac{R}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.19}$$

$$\boxed{S = 10^3\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]/10^{-2}\left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right] = 10^5\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]}$$

S	Sicherheit (Safety or security).
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$	Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.

MF-Beseitigung

Aufgabe 1.6: Kenngrößen Überwachung

Bei der Kontrolle von 10^5 DS sind 10^3 MF aufgetreten, von denen 600 MF erkannt wurden. Darüber hinaus wurden 10 DS als MF ausgewiesen, die in Wirklichkeit korrekt ausgeführt wurden.

$$\#DS = 10^5,\ \#MF = 10^3,\ \#DM = 600,\ \#PM = 10$$

a) *Wie groß sind die beobachtete und die tatsächliche Zuverlässigkeit?*

b) *Wie groß ist die Fehlfunktionsüberdeckung der Überwachung?*

c) *Wie groß ist die Phantom-MF-Rate der Überwachung?*

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen (Number of delivered services).
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$\#DM$	Anzahl der erkannten Fehlfunktionen (Number of detected MFs).
$\#PM$	Anzahl der Phantom-MF, d.h. der korrekten DS, die als MF klassifiziert werden.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

$\#DS = 10^5$, $\#MF = 10^3$, $\#DM = 600$, $\#PM = 10$

a) *Wie groß sind die beobachtete und die tatsächliche Zuverlässigkeit?*

$$R = \left.\frac{\#DS}{\#MF}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{1.9}$$

Beobachtete Zuverlässigkeit:

$$R = \frac{\#DS}{\#DM+\#PM} = \frac{10^5}{610}\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] = 164\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Tatsächliche Zuverlässigkeit:

$$R = \frac{\#DS}{\#MF} = \frac{10^5}{10^3}\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] = 100\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

R	Zuverlässigkeit (Reliability).
ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

$\#DS = 10^5$, $\#MF = 10^3$, $\#DM = 600$, $\#PM = 10$

b) *Wie groß ist die Fehlfunktionsüberdeckung der Überwachung?*

$$MC = \frac{600\,[\mathrm{MF}]}{1000\,[\mathrm{MF}]} = 60\%$$

c) *Wie groß ist die Phantom-MF-Rate der Überwachung?*

$$\zeta_{\mathrm{Phan}} = \frac{10\,[\mathrm{PM}]}{10^5\,[\mathrm{DS}]} = 10^{-4}\left[\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{DS}}\right]$$

MC	Fehlfunktionsüberdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.
$[\mathrm{MF}]$	Zählwert in Fehlfunktionen.
ζ_{Phan}	Phantom-Fehlfunktionsrate.
$\left[\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Phantom-Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Aufgabe 1.7: Übertragung mit Wiederholung nach MF

Datenübertragung mit Fehlfunktionsrate $10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ und 8 redundanten Bits je Datensatz. Verfälschung werden gleichhäufig auf alle darstellbaren Werte verteilt und Erkennung aller unzulässigen Werte. Korrektur erkannter Verfälschungen durch max. eine Wiederholung. MF-Usache zu 100% Störungen.

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\mathrm{Div}} = 1$, $\zeta_{\mathrm{Phan}} = 0$

a) *Zuverlässigkeit ohne MF-Behandlung?*

b) *Fehlfunktionsüberdeckung?*

c) *Rate der erbrachten Service-Leistungen mit MF-Behandlung?*

d) *Zuverlässigkeit mit MF-Behandlung?*

e) *Erforderliche Anzahl der redundanten Datenbits zur Erhöhung der Zuverlässigkeit mit MF-Behandlung auf* 10^{10} *übertragene Datensätze je NDM?*

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\text{Div}} = 1$, $\zeta_{\text{Phan}} = 0$

a) *Zuverlässigkeit ohne MF-Behandlung?*

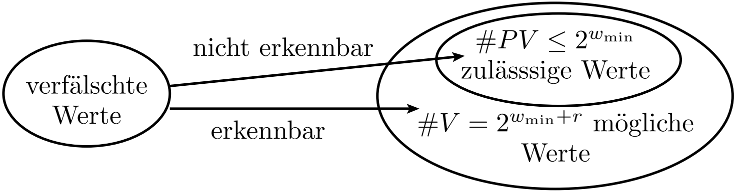
$$R = 1/\zeta \tag{1.11}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{10^{-6}\left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]} = 10^6\ \left[\frac{\text{DS}}{\text{MF}}\right]}$$

ζ	Fehlfunktionsrate ohne Fehlfunktionsbehandlung.
r	Anzahl der redundanten Bits.
η_{Div}	Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechung.
ζ_{Phan}	Phantom-Fehlfunktionsrate.
R	Zuverlässigkeit (reliability) ohne Fehlfunktionsbehandlung.
$\left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
$\left[\frac{\text{DS}}{\text{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\mathrm{Div}} = 1$, $\zeta_{\mathrm{Phan}} = 0$

b) *Fehlfunktionsüberdeckung?*



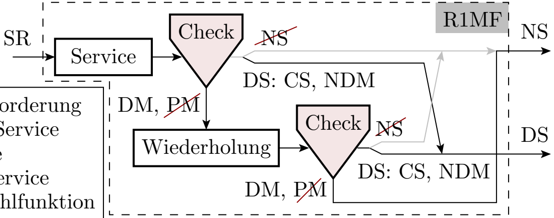
$$MC \ge 1 - 2^{-r} \tag{1.24}$$

$$MC = 1 - 2^{-8} = 99{,}61\%$$

MC	Fehlfunktionsüberdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.
η_{DS}	Anteil der erbringbaren Service-Leistungen.

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\text{Div}} = 1$, $\zeta_{\text{Phan}} = 0$

c) *Rate der erbrachten Service-Leistungen mit MF-Behandlung?*



SR	Service-Anforderung
DS	erbrachter Service
NS	kein Service
CS	korrekter Service
DM	erkannte Fehlfunktion
NDM	nicht erkannte MF

$$\eta_{\text{DS}} = 1 - \underbrace{\cancel{\zeta \cdot MC \cdot \left(\underbrace{1 - \eta_{\text{Div}}}_{0}\right)}}_{\text{gleiche MF bei Wied.}} - \underbrace{\underbrace{\zeta \cdot \zeta}_{10^{-12}} \cdot MC \cdot \eta_{\text{Div}}}_{\text{andere MF nach Wied.}} - \underbrace{\cancel{\zeta_{\text{Phan}} \cdot \left(\underbrace{1 - \eta_{\text{Div}}}_{0}\right)}}_{\text{gleiche PM bei Wied.}}$$

$$= 1 - 10^{-12}\ \text{(praktisch eins)}$$

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\text{MF}}{\text{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\text{Div}} = 1$, $\zeta_{\text{Phan}} = 0$

d) *Zuverlässigkeit mit MF-Behandlung?*

Für $\eta_{\text{DS}} = 1$ (Aufgabenteil c) gilt

$$R_{\text{MT}} = \frac{R}{1-MC} \tag{1.32}$$

Fehlfunktionsüberdeckung $MC = 1 - 2^{-8}$ (Aufgabenteil a):

$$R_{\text{MT}} = \frac{1}{\zeta\cdot(1-MC)} = \frac{1}{\zeta\cdot 2^r} = \frac{1}{10^{-6}\cdot 2^{-8}} = 2{,}56\cdot 10^8\ \left[\frac{\text{DS}}{\text{MF}}\right]$$

R_{MT} Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung (Reliability with malfunction treatment).
MC Fehlfunktionsüberdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.

$\zeta = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $r = 8$, max. eine Wiederholung, $\eta_{\mathrm{Div}} = 1$, $\zeta_{\mathrm{Phan}} = 0$

e) *Erforderliche Anzahl der redundanten Datenbits zur Erhöhung der Zuverlässigkeit mit MF-Behandlung auf 10^{10} übertragene Datensätze je NDM?*

Gleichung

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{1}{\zeta \cdot 2^r}$$

von Folie zuvor umgestellt nach r:

$$r = -\log_2\left(R_{\mathrm{MT}} \cdot \zeta\right) = -\log_2\left(10^{10} \cdot 10^{-6}\right) \geq 13{,}3$$

Mindestens $r = 14$ redundante Bits.

Aufgabe 1.8: Master-Checker-System

Master und Checker habe die übereinstimmende MF-Rate $\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$. Der Anteil der MF durch Fehler sei jeweils 50%. Davon werden 20% von übereinstimmenden Fehlern mit derselben Wirkung verursacht. Unabhängig von der Nachweis- und Korrigierbarkeit seien 1% der Master-MF sicherheitsgefährdent. MF-Behandlung durch Wiederholung nach MF und PM. Vernachlässigung der unwahrscheinlichen Möglichkeit, dass zufällig mehr als eine der Berechnungen durch unabhängige Ursachen verfälscht wird.

$$\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right],\ \eta_{\mathrm{F}} = 50\%,\ \eta_{\mathrm{CF}} = 20\%,\ \eta_{\mathrm{SE}} = 1\%\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$$

a) *Diversitätsrate beider Berechnungen?*

b) *Zuverlässigkeit und Sicherheit Master (ohne MF-Behandlung)?*

c) *Zuverlässigkeit und Sicherheit mit MF-Behandlung?*

ζ_{MS}	Übereinstimmende Fehlfunktionsrate von Master und Checker.
η_{F}	Anteil der Fehlfunktionen durch Fehler.
η_{CF}	Anteil der MF durch identische Fehler, die ein Ergebnisvergleich nicht erkennt.
η_{SE}	Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen.

$\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\eta_{\mathrm{F}} = 50\%$, $\eta_{\mathrm{CF}} = 20\%$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 1\% \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$

a) *Diversitätsrate beider Berechnungen?*

In der Technik versteht man unter Diversität verschiedenartige Realisierungen gleicher Aufgaben zur Vermeidung gleicher MF bei Mehrfachberechnung oder Wiederholung. Die Diversitätsrate ist der Anteil der MF, die nicht bei einer Zweitrechnung in derselben Weise auftreten:

$$\eta_{\mathrm{Div}} = 1 - \eta_{\mathrm{F}} \cdot \eta_{\mathrm{CF}} \tag{1.27}$$

$$\eta_{\mathrm{Div}} = 1 - 50\% \cdot 20\% = 90\%$$

η_{Div} Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechung.

$\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\eta_{\mathrm{F}} = 50\%$, $\eta_{\mathrm{CF}} = 20\%$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 1\%\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$

b) *Zuverlässigkeit und Sicherheit Master (ohne MF-Behandlung)?*

Zuverlässigkeit:

$$R = 1/\zeta \tag{1.11}$$

$$R = \frac{1}{10^{-6}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]} = 10^{6}\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Sicherheit:

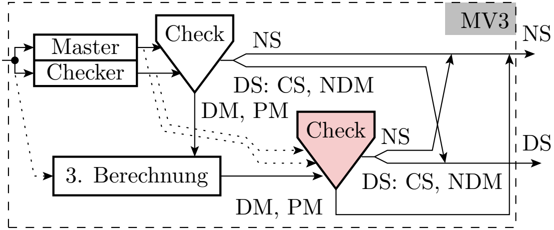
$$S = \frac{R}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.19}$$

$$S = 10^{6}\ \left[\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MF}}\right] / 1\%\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right] = 10^{8}\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$$

R	Zuverlässigkeit (reliability) ohne Fehlfunktionsbehandlung.
S	Sicherheit ohne Fehlfunktionsbehandlung.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$	Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.

$\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\eta_{\mathrm{F}} = 50\%$, $\eta_{\mathrm{CF}} = 20\%$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 1\%\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$

c) *Zuverlässigkeit und Sicherheit mit MF-Behandlung?*



FC und Phantom-MF-Rate »Master-Checker« nach Gl. 1.25 und 1.26:

$$MC = \eta_{\mathrm{Div}}; \quad \zeta_{\mathrm{Phan}} = \zeta_{\mathrm{MS}} \cdot (1 - \eta_{\mathrm{Div}})$$

Eingesetzt in:

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{(1-(\zeta \cdot MC + \zeta_{\mathrm{Phan}}) \cdot (1-\eta_{\mathrm{Div}}))}{(1-MC)\cdot\zeta} \qquad (1.40)$$

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MS}}}{(1-\eta_{\mathrm{Div}})} - 1 \qquad (1.44)$$

$\zeta_{\mathrm{MS}} = 10^{-6}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\eta_{\mathrm{F}} = 50\%$, $\eta_{\mathrm{CF}} = 20\%$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 1\%\ \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right]$

Zuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MS}}}{(1-\eta_{\mathrm{Div}})} - 1 \tag{1.44}$$

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{10^6\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}{1-90\%} - 1 = 10^7\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

Sicherheit:

$$S = \frac{R}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.19}$$

$$S_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MV3}}}{\eta_{\mathrm{SE}}} = 10^7\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] / 1\% \left[\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{MF}}\right] = 10^9\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$$

R_{MT} Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung (Reliability with malfunction treatment).
S_{MT} Sicherheit mit Fehlfunktionsbehandlung.

Aufgabe 1.9: Sicherheitserhöhung durch MF-Behandlung

Bei einem IT-System mit einer mittleren Nutzungsdauer zwischen zwei MF von 1000 Stunden, einer mittleren Service-Dauer von einer Stunde gefährde abschätzungsweise jede hundertste MF die Betriebssicherheit. Um die Betriebssicherheit auf $10^6\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$ zu erhöhen, soll das System um eine MF-Behandlung erweitert werden, die es bei Erkennen einer Fehlfunktion in einen sicheren Zustand überführt.

$$MTBM = 10^3\,\mathrm{h},\ MTS = 1\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SE}} = 1\%,\ S_{\mathrm{MT}} = 10^6\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$$

a) *Erforderliche Fehlfunktionsüberdeckung, wenn beim Überführen in den sicheren Zustand keine Fehlfunktionen auftreten?*

b) *Erforderliche Fehlfunktionsüberdeckung, wenn im Mittel jeder 20te Versuch, einen sicheren Zustand herzustellen, scheitert?*

c) *In welchem mittleren zeitlichen Abstand wird ein sicherer Zustand hergestellt, ohne dass die Betriebssicherheit gefährdet ist?*

$MTBM$	Mittlere Nutzungsdauer zwischen Fehlfunktion (Mean service life between malfunctions).
MTS	Mittlere Service-Dauer (Mean time to service).
η_{SE}	Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen.
S_{MT}	Sicherheit mit Fehlfunktionsbehandlung.

$MTBM = 10^3\,\mathrm{h}$, $MTS = 1\,\mathrm{h}$, $\eta_{\mathrm{SE}} = 1\%$, $S_{\mathrm{MT}} = 10^6\,\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$

a) *Erforderliche Fehlfunktionsüberdeckung, wenn beim Überführen in den sicheren Zustand keine Fehlfunktionen auftreten?*

$$R = \frac{MTBM}{MTS} \tag{1.10}$$

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{R}{1-MC} \tag{1.32}$$

$$S_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MT}}}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.49}$$

Keine Wiederholung bei MF, geringe MF-Rate und keine Phantom-MF:

$$S_{\mathrm{MT}} = \frac{R}{\eta_{\mathrm{SE}} \cdot (1 - MC)} = \frac{MTBM}{\eta_{\mathrm{SE}} \cdot (1 - MC) \cdot MTS}$$

$$MC = 1 - \frac{MTBM}{\eta_{\mathrm{SE}} \cdot MTS \cdot S_{\mathrm{MT}}} = 1 - \frac{10^3\,\mathrm{h}}{1\% \cdot 1\,\mathrm{h} \cdot 10^6} = 90\%$$

R_{MT}	Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung (Reliability with malfunction treatment).
R	Zuverlässigkeit (reliability) ohne Fehlfunktionsbehandlung.
MC	Fehlfunktionsüberdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.

$$MTBM = 10^3\,\mathrm{h},\ MTS = 1\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SE}} = 1\%,\ S_{\mathrm{MT}} = 10^6\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$$

b) *Erforderliche Fehlfunktionsüberdeckung, wenn im Mittel jeder 20te Versuch, einen sicheren Zustand herzustellen, scheitert?*

Wenn jeder 20-te Versuch scheidert, dann müssen im Mittel 19 von 20 (sicherheitskritische) Fehlfunktionen erkannt werden, damit in 9 von 10 Fällen ein sicherer Zustand erreicht wird:

$$MC = \left.\frac{\#DM}{\#MF}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{1.20}$$

$$MC = \frac{19}{20} = 95\%$$

$\#DM$	Anzahl der erkannten Fehlfunktionen (Number of detected MFs).
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

$$MTBM = 10^3\,\mathrm{h},\ MTS = 1\,\mathrm{h},\ \eta_{\mathrm{SE}} = 1\%,\ S_{\mathrm{MT}} = 10^6\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{HM}}\right]$$

c) *In welchem mittleren zeitlichen Abstand wird ein sicherer Zustand hergestellt, ohne dass die Betriebssicherheit gefährdet ist?*

Ein sicherer Zustand wird etwa aller 1000 h hergestellt, in 99% der Fälle für eine ungefährliche MF. Mittlerer zeitlicher Abstand:

$$\frac{1000\,\mathrm{h}}{99\%} = 1010\,\mathrm{h}$$

Fehlerbeseitigung

Aufgabe 1.10: Fehler und Störungen

a) *Warum ist es viel einfacher, Fehlfunktionen durch Störungen zu korrigieren als solche, die durch Fehler verursacht werden?*

b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*

MF	Fehlfunktion.
DS	Erbrachte Service-Leistung.

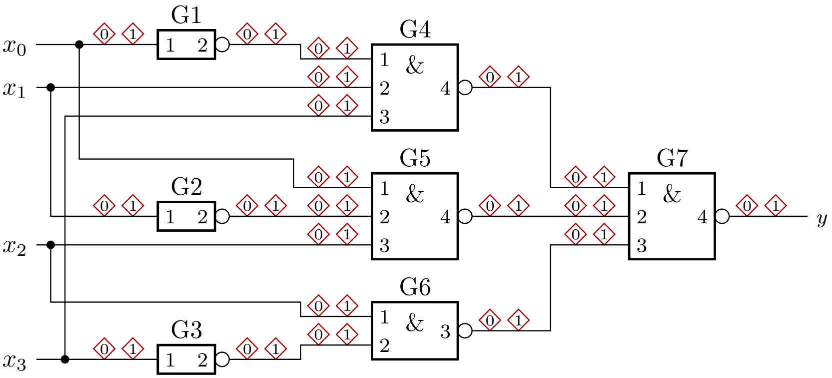
a) *Warum ist es viel einfacher, Fehlfunktionen durch Störungen zu korrigieren als solche, die durch Fehler verursacht werden?*

Störungen wirken diversitär. Eine erkannte Fehlfunktion durch eine Störung lässt sich in der Regel durch Wiederholung der Service-Leistung mit gleichen Eingaben korrigieren. Bei Fehlern als Ursache verlangt ein erfolgreiche Korrektur andere Formen der Diversität, geänderte Eingaben oder eine diversitäre Verarbeitung.

b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*

Nach Beseitigungsversuchen für Fehler kann der Erfolg durch eine einzelne Testwiederholung kontrolliert werden, während nach Beseitigungsversuchen für Ursachen von Störung die Verringerung die MF-Raten überprüft werden muss. Dazu muss solange getestet werden, bis eine signifikante Abnahme der Anzahl der MF im Testzeitintervall nachweisbar ist, also mit Millionen oder mehr DS.

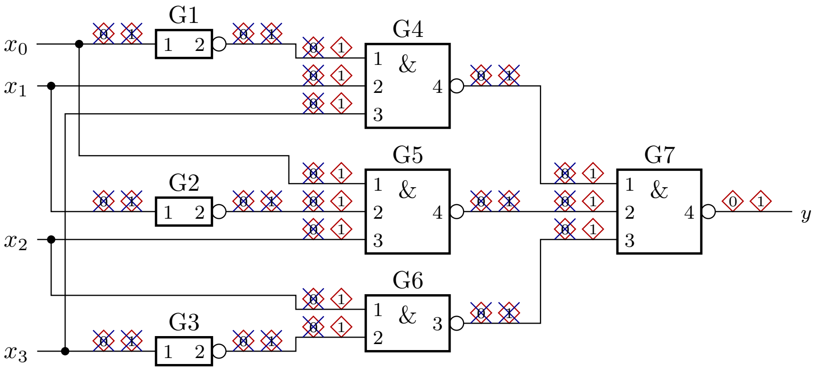
Aufgabe 1.11: Vereinfachung einer Haftfehlermenge



a) *Fassen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler zu einem Modellfehler zusammen.*

b) *Bestimmen Sie davon alle implizit nachweisbaren Haftfehler.*

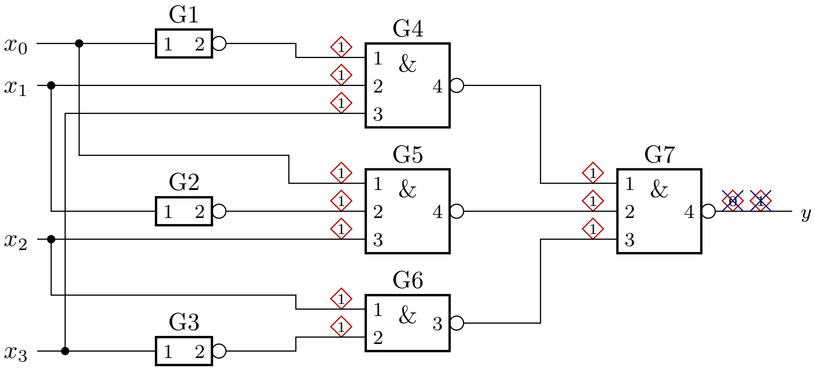
a) *Fassen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler zu einem Modellfehler zusammen.*



Identisch nachweisbare Haftfehler:

- sa0(G1-1), sa1(G1-2), sa1(G4-1)
- sa1(G1-1), sa0(G1-2), sa0(G4-1), sa1(G4-4), sa1(G7-1), ...

b) *Bestimmen Sie davon alle implizit nachweisbaren Haftfehler.*



Implizit nachweisbare Haftfehler:

- sa0(G7-4): sa1(G7-1), sa1(G7-2), sa1(G7-3)
- sa1(G7-4): sa1(G4-1), sa1(G4-2), sa1(G4-3), sa1(G5-1), ...

Aufgabe 1.12: Fehleranzahl, MF-Rate und Zuverlässigkeit

In einer Iteration aus Test und Fehlerbeseitigung, bei der alle erkannten Fehler beseitigt wurden, war bei Erhöhung der Anzahl der dynamischen Tests von 10^5 auf 10^6 eine Verringerung der MF-Rate von 10^{-3} auf $4 \cdot 10^{-5}$ MF je DS zu beobachten. MF durch Störungen sind zu vernachlässigen.

$N_1 = 10^5$, $N_2 = 10^6$, $\zeta(N_1) = 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$,
$\zeta_{\mathrm{D}} = 0$

a) *Auf welchen Exponenten K für die Dichte der MF-Rate lässt sich unter den Modellannahmen in der Vorlesung daraus schließen?*

b) *Wie viele Fehler werden in der Iteration aus Test und Beseitigung der erkennbaren Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von N_1 auf N_2 abschätzungsweise beseitigt?*

c) *Welche Zuverlässigkeit ist nach N_2 Tests zu erwarten und welche Testsatzlänge N_3 ist nach den Modellannahmen erforderlich, um die zu erwartende Zuverlässigkeit auf $10^8\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ zu erhöhen?*

N_1, N_2 Testanzahl mit bekannter / gesuchter Fehleranzahl oder Zuverlässigkeit.

$N_1 = 10^5$, $N_2 = 10^6$, $\zeta(N_1) = 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta(N_2) = 4\cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta_\mathrm{D} = 0$

a) *Auf welchen Exponenten K für die Dichte der MF-Rate lässt sich unter den Modellannahmen in der Vorlesung daraus schließen?*

$$K = \log\left(\frac{\zeta_\mathrm{F}(N_1)}{\zeta_\mathrm{F}(N_2)}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right) - 1 \tag{1.64}$$

Wegen $\zeta_\mathrm{D} = 0$ ist $\zeta_\mathrm{F} = \zeta$:

$$K = \left(\ln\left(\frac{10^{-3}}{4\cdot 10^{-5}}\right) / \ln\left(\frac{10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]}{10^{-6}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]}\right)\right) - 1 = 0{,}4$$

$\zeta_\mathrm{F}(N)$	Fehlfunktionsrate durch Fehler in Abhängigkeit von der Testanzahl.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
ζ_D	Fehlfunktionsrate durch Störungen (Malfunction rate due to disturbance).
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.

$N_1 = 10^5$, $N_2 = 10^6$, $\zeta(N_1) = 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta(N_2) = 4\cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$

b) *Wie viele Fehler werden in der Iteration aus Test und Beseitigung der erkennbaren Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von N_1 auf N_2 abschätzungsweise beseitigt?*

$$\zeta_{\mathrm{F}}(N) = \frac{\mu_{\mathrm{F}}(N)\cdot K}{N} \qquad (1.60)$$

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = \frac{N_1}{K}\cdot\zeta(N_1) = \frac{10^5}{0{,}4}\cdot 10^{-3} = 251\ [\mathrm{F}]$$

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \frac{N_2}{K}\cdot\zeta(N_2) = \frac{10^6}{0{,}4}\cdot 4\cdot 10^{-5} = 100\ [\mathrm{F}]$$

Zu erwartende Anzahl der zu beseitigenden Fehler:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) - \mu_{\mathrm{F}}(N_2) = 151\ [\mathrm{F}]$$

$\mu_{\mathrm{F}}(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$[\mathrm{F}]$	Zählwert in Fehlern.

$N_1 = 10^5$, $N_2 = 10^6$, $\zeta(N_1) = 10^{-3}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta(N_2) = 4\cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$, $\zeta_\mathrm{D} = 0$

c) *Welche Zuverlässigkeit ist nach N_2 Tests zu erwarten und welche Testsatzlänge N_3 ist nach den Modellannahmen erforderlich, um die zu erwartende Zuverlässigkeit auf $10^8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ zu erhöhen?*

$$R = 1/\zeta \qquad (1.11)$$

$$R_\mathrm{F}(N_2) = R_\mathrm{F}(N_1)\cdot\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{K+1} \qquad (1.66)$$

Wegen $\zeta_\mathrm{D} = 0$ ist $\zeta_\mathrm{F} = \zeta$ und $R_\mathrm{F} = R$:

$$R(N_2) = \frac{1}{\zeta(N_2)} = \frac{1}{4\cdot 10^{-5}}\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] = 25000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

$$N_3 = N_2\cdot\left(\frac{R(N_3)}{R(N_2)}\right)^{\frac{1}{K+1}} = 10^6\cdot\left(\frac{10^8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}{2{,}5\cdot 10^4\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}\right)^{\frac{1}{0{,}4+1}} = 3{,}77\cdot 10^8$$

$R_\mathrm{F}(N)$	Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehlern.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Aufgabe 1.13: Vortest und Zufallstest

Von 1000 entstandenen Fehlern erkennt der vorgelagerte statische Test 80%, von den verbleibenden 20% erkennen 20 gezielt gesuchte dynamische Tests 60% und von den dann noch verbleibenden $20\% \cdot 40\%$ erkennen weitere 80 zufällige Tests 50%. Beseitigung aller erkannten Fehler.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

a) *Mit welchem Exponenten K nimmt der zu erwartende Anteil der nicht erkannten Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von $N_0 = 20$ auf $N_1 = 100$ ab?*

b) *Zu erwartende Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

c) *Wie groß sind Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Erhöhung der Anzahl der Tests von $N_1 = 100$ auf $N_2 = 1000$?*

μ_{FCR}	Zu erwartende Fehleranzahl aus den Entstehungs- und Reparaturprozessen insgesamt.
FC_{PT}	Fehlerüberdeckung der Vortests (Fault coverage of the pre tests).
N_0	Anzahl der dynamischen Tests aller Vortests zusammen.
N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
$\mu_{\mathrm{F}}(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

d) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf 4?*

e) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf $R_{\mathrm{F}}(N) = 1000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$?*

$R_{\mathrm{F}}(N)$	Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehlern.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

a) *Mit welchem Exponenten K nimmt der zu erwartende Anteil der nicht erkannten Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von $N_0 = 20$ auf $N_1 = 100$ ab?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

Bei der Vergrößerung der Anzahl der Zufallstests von $N_0 = 20$ auf $N_1 = 100$ halbiert sich die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler:

$$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{-K} = 5^{-K}$$

$$K = -\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(5)} = 0{,}431$$

K Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

b) *Zu erwartende Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_0) = \mu_{\mathrm{FCR}} \cdot (1 - FC_{\mathrm{PT}}) \tag{1.62}$$

$$R_{\mathrm{F}}(N) = \frac{N}{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N)} \tag{1.65}$$

Zu erwartende Fehleranzahl:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = \mu_{\mathrm{FCR}} \cdot (1 - FC_{\mathrm{PT}}) \cdot 0{,}5 = 1000\ [\mathrm{F}] \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 40\ [\mathrm{F}]$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{F}}(N_1) = \frac{100}{0{,}431 \cdot 40} = 5{,}8 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

c) *Wie groß sind Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Erhöhung der Anzahl der Tests von* $N_1 = 100$ *auf* $N_2 = 1000$*?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \quad (1.58)$$

$$R_{\mathrm{F}}(N_2) = R_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{K+1} \quad (1.66)$$

Zu erwartende Fehleranzahl:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = 40\ [\mathrm{F}] \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{-0{,}431} = 14{,}8\ [\mathrm{F}]$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{F}}(N_2) = 5{,}8 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right] \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{1+0{,}431} = 157 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

d) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf 4?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl N_3:

$$\begin{aligned} N_3 &= N_1 \cdot \left(\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_3)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}\right)^{-\frac{1}{K}} \\ &= 100 \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^{-\frac{1}{0{,}431}} = 20.900 \end{aligned}$$

Eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl der nicht beseitigten Fehler von 40 auf 4 erfordert zusätzlich 20.800 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 209-fache Testsatzlänge.

$\mu_{\mathrm{FCR}} = 10^3$, $FC_{\mathrm{PT}} = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$, $N_0 = 20$, $N_1 = N_0 + 80$, $\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}$.

e) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf* $R_{\mathrm{F}}(N) = 1000 \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$*?*

$$R_{\mathrm{F}}(N_2) = R_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{K+1} \tag{1.66}$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl N_4:

$$N_4 = N_1 \cdot \left(\frac{R_{\mathrm{F}}(N_4)}{R_{\mathrm{F}}(N_1)}\right)^{\frac{1}{1+K}}$$

$$= 100 \cdot \left(\frac{1000\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}{5{,}8\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]}\right)^{\frac{1}{1{,}431}} = 3.656$$

Eine Erhöhung der Zuverlässigkeit von 5,8 auf 1000 (etwa das 170-fache) verlangt nur zusätzlich 3.556 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 25-fache Testsatzlänge.

Aufgabe 1.14: Reifeprozess, Zuverlässigkeitserhöhung

Ein bei vielen Nutzern eingesetztes Software-System hat nach einer Reifedauer von 100 Tagen eine Zuverlässigkeit von $10^5\,\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}$. Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge sei $K = 0{,}4$. Die Testanzahl vor dem Einsatz und MF-Rate durch Störungen seien vernachlässigbar.

$$t_{\mathrm{M0}} = 100\,\mathrm{Tage},\ R\left(t_{\mathrm{M0}}\right) = 10^5\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right],\ K = 0{,}4,\ \zeta_{\mathrm{D}} = 0,\ t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$$

a) *Nach wie vielen weiteren Tagen Reifedauer verzehnfacht sich die Zuverlässigkeit?*

b) *Welcher Vergrößerungsfaktor der Zuverlässigkeit ist nach einer Reifezeit von einem Jahr (365 Tage) zu erwarten?*

$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$t_{\mathrm{M}},\ t_{\mathrm{M0}}$	Reifedauer und Bezugsreifedauer.
$R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right)$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach der Reifedauer t_{M}.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.
t_{V0}	Equivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.

$t_{\mathrm{M0}} = 100\,\mathrm{Tage}$, $R\left(t_{\mathrm{M0}}\right) = 10^5\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$, $K = 0{,}4$, $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$, $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$

a) *Nach wie vielen weiteren Tagen Reifedauer verzehnfacht sich die Zuverlässigkeit?*

$$R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right) = R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M0}}\right) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{1.78}$$

Unter Vernachlässigung von t_{V0} gegenüber t_{M} und mit $\zeta_{\mathrm{D}} = 0$ ($R = R_{\mathrm{F}}$) gilt für die gesamte Zuverlässigkeit:

$$t_{\mathrm{M}} = t_{\mathrm{M0}} \cdot \left(\frac{R(t_{\mathrm{M}})}{R(t_{\mathrm{M0}})}\right)^{\frac{1}{K+1}} =$$

$$= 100\,\mathrm{Tage} \cdot 10^{\frac{1}{1{,}4}} = 518\,\mathrm{Tage}$$

Verzehnfachung der Zuverlässigkeit nach 418 weiteren Tagen Reifedauer.

$t_{\mathrm{M0}} = 100\,\mathrm{Tage},\ R(t_{\mathrm{M0}}) = 10^5\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right],\ K = 0{,}4,\ \zeta_{\mathrm{D}} = 0,\ t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$

b) *Welcher Vergrößerungsfaktor der Zuverlässigkeit ist nach einer Reifezeit von einem Jahr (365 Tage) zu erwarten?*

$$R_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M}}) = R_{\mathrm{F}}(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \quad (1.78)$$

Weiterhin Annahme $R = R_{\mathrm{F}}$:

$$R(t_{\mathrm{M}}) = R(t_{\mathrm{M0}}) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}\right)^{K+1}$$

$$\frac{R(365)}{R(100)} = \left(\frac{365}{100}\right)^{1{,}4} = 6{,}27$$

Nach insgesammt einem Jahr Reifedauer hat das System die 6,27-fache Zuverlässigkeit im Vergleich zur Bezugsreifedauer t_{M0}.

Aufgabe 1.15: Reifedauer, Sicherheit

Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge liege im Bereich von $K = 0{,}3 \ldots 0{,}5$. Die äquivalente Reifedauer vor dem Einsatz sei wieder gegenüber der Bezugsreifedauer t_{M0} vernachlässigbar. Die Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit, dass ein Fehler, wenn er bei einem Anwender eine MF verursacht, beseitigt wird, soll sich nicht ändern und MF durch Störungen sei auch wieder vernachlässigbar.

$K = 0{,}3 \ldots 0{,}5$, $\zeta_{\mathrm{D}} \ll \zeta_{\mathrm{F}}$, $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$.

a) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_{M} gegenüber t_{M0} erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?*

b) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_{M} gegenüber t_{M0} erhöht werden, um die Sicherheit des Systems zu verzehnfachen?*

K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.
ζ_{D}	Fehlfunktionsrate verursacht durch Störungen, Fehlfunktionsrate verursacht durch Fehler.
t_{V0}	Equivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.
t_{M}, t_{M0}	Reifedauer und Bezugsreifedauer.

$K = 0{,}3 \ldots 0{,}5$, $\zeta_D \ll \zeta_F$, $t_{V0} \ll t_{M0}$.

a) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_M gegenüber t_{M0} erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?*

$$\mu_F(t_M) = \mu_F(t_{M0}) \cdot \left(\frac{t_M + t_{V0}}{t_{M0} + t_{V0}}\right)^{-K} \quad (1.76)$$

Wegen $t_{V0} \ll t_M$ ist t_{V0} vernachlässigbar:

$$\frac{t_M}{t_{M0}} = \left(\frac{\mu_F(t_M)}{\mu_F(t_{M0})}\right)^{-\frac{1}{K}} = \frac{1}{10}^{-\frac{1}{K}} = 10^{\frac{1}{K}}$$

K	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_M}{t_{M0}}$	2154	316	100

Zur Verringerung der Anzahl der nicht beseitigten Fehler auf ein Zehntel muss die Reifedauer in Abhängigkeit von K auf das hundet bis mehr als 2.000-fache erhöht werden.

$\mu_F(t_M)$ Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Reifedauer.

$K = 0{,}3 \ldots 0{,}5$, $\zeta_{\mathrm{D}} \ll \zeta_{\mathrm{F}}$, $t_{\mathrm{V0}} \ll t_{\mathrm{M0}}$.

b) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer t_{M} gegenüber t_{M0} erhöht werden, um die Sicherheit des Systems zu verzehnfachen?*

$$R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right) = R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M0}}\right) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{1.78}$$

Mit t_{V0} und MF durch Störungen vernachlässigbar. Sicherheit proportional zur Zuverlässigkeit:

$$\frac{S(t_{\mathrm{M}})}{R(t_{\mathrm{M}})} = \eta_{\mathrm{SE}}$$

$$\frac{S(t_{\mathrm{M}})}{S(t_{\mathrm{M0}})} = 10 = \left(\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}\right)^{K+1}$$

$$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}} = 10^{1/(K+1)}$$

K	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_{\mathrm{M}}}{t_{\mathrm{M0}}}$	5,88	5,18	4,64

Die zehnfache Sicherheit verlangt die 5 bis 6-fache Reifedauer. Viel geringere Abhängigkeit von K als in der Teilaufgabe zuvor.

S Sicherheit (Safety or security).
η_{SE} Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen.

Aufgabe 1.16: Defektanteil eines Rechners

Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, ...) und Lötstellen.

Bauteile	Anzahl	Defektanteil	Summation für den gesamten Rechner
Leiterplatten	2	600 dpm	dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+ dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+ dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+ dpm
			= dpm

a) *Wie groß ist der zu erwartende Defektanteil des Rechners, wenn anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigbar sind?*

b) *Auf welchen Wert verringert sich der Defektanteil, wenn für alle Arten von Bauteilen die Anzahl halbiert wird?*

dpm Anzahl der defekten Objekte von einer Million (defecs per million).

Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, ...) und Lötstellen.

a) *Wie groß ist der zu erwartende Defektanteil des Rechners, wenn anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigbar sind?*

$$\mu_{\mathrm{FSys}} = \sum_{i=1}^{\#Prt} DL_i \tag{1.89}$$

Bauteil	Anzahl	Defektanteil	Produkt	
Leiterplatten	2	600 dpm		1200 dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+	6000 dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+	1800 dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+	5000 dpm
			=	14000 dpm

Von 1000 Rechnern enthalten im Mittel 14 beim Verkauf ein defektes Bauteil, das aber in der Regel nur schwer bemerkbare Fehler enthält.

μ_{FSys}	zu erwartende Fehleranzahl des Gesamtsystem.
$\#Prt$	Anzahl der Bauteile (Number of parts).
DL_i	Defektanteil von Bauteil i (Defect level of component i).

Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, ...) und Lötstellen.

b) *Auf welchen Wert verringert sich der Defektanteil, wenn für alle Arten von Bauteilen die Anzahl halbiert wird?*

Bei der halben Bauteilzahl und ansonsten gleichen Werten halbiert sich der Defektanteil. Statt im Mittel 14 enthalten im Mittel nur 7 von 1000 Rechnern ein defektes Bauteil.

Fehlervermeidung

Aufgabe 1.17: Nicht beseitigte Programmierfehler

Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in einem Programm mit 10^5 NLOC (Netto Lines of Code) bei einer Fehlerentstehungsrate von 40 Fehlern je 1000 NLOC, wenn der Test 80% der Fehler erkennt, erkannte Fehler beseitigt werden und bei der Fehlerbeseitigung keine neuen Fehler entstehen?

$$C = 10^5\,\mathrm{NLOC},\ \xi = \frac{40\,\mathrm{F}}{1000\,\mathrm{NLOC}},\ FC = 80\%.$$

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
C	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
ξ	Fehlergenerierungsrate in zu erwartenden Fehlern je NLOC.
FC	Fehlerüberdeckung (fault coverage), Anteil der nachweisbaren Fehler.
$[\mathrm{F}]$	Zählwert in Fehlern.

$C = 10^5\,\mathrm{NLOC}$, $\xi = \frac{40\,\mathrm{F}}{1000\,\mathrm{NLOC}}$, $FC = 80\%$.

$$\mu_{\mathrm{CF}} = \xi \cdot C \tag{1.91}$$
$$FC = \left.\frac{\#DF}{\#F}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{1.52}$$

Zu erwartende Anzahl der entstehenden und nicht erkannten und damit auch nicht beseitigten Fehler:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{F}} &= \xi \cdot C \cdot (1 - FC) \\ &= 10^5\,\mathrm{NLOC} \cdot 40\,\left[\tfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right] \cdot (1 - 80\%) = 800\,[\mathrm{F}]\end{aligned}$$

Es entstehen 4000 Fehler, von denen 800 nicht erkannt und damit nicht beseitigt werden.

Aufgabe 1.18: Fehlervermeidung

a) *Warum wird für Entstehungsprozesse Determinismus angestrebt?*

b) *Wie wird der Reparaturerfolg bei nicht deterministischen Prozessen kontrolliert?*

c) *Warum hat der Defektanteil von Produkten typischerweise einen sägezahnförmigen Verlauf über die Jahre, die das Produkt gefertigt wird?*

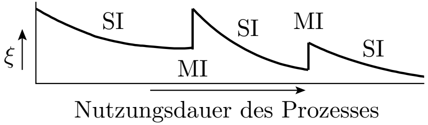
a) *Warum wird für Entstehungsprozesse Determinismus angestrebt?*

Determinismus ist Voraussetzung für die Erfolgskontrolle einer Fehlerbeseitigung durch Testwiederholung. Eine Erfolgskontrolle mit klarer ja/nein-Aussage ist die Voraussetzung für den Rückbau nach erfolglosen Fehlerbeseitigungsversuchen und die Fortsetzung der Prozessverbesserung mit den nächsten Fehlersymtomen.

b) *Wie wird der Reparaturerfolg bei nicht deterministischen Prozessen kontrolliert?*

Bei nicht deterministischen Prozessen wird der Erfolg von Verbesserungen anhand von Erwartungswerten, Varianzen, Verteilungen, ... messbarerer Produkteigenschaften kontrolliert. Verlangt statt einer Prozesswiederholung eine statistisch signifikante Anzahl von sehr vielen Wiederholungen.

c) *Warum hat der Defektanteil von Produkten typischerweise einen sägezahnförmigen Verlauf über die Jahre, die das Produkt gefertigt wird?*



Bei der Einführung neuer Maschinen, Verfahren, ... kommen Fehler in den Prozess und erhöhen die Fehlerentstehungsrate. Mit der Prozessnutzung werden diese Fehler und Schwachstellen beseitigt, so dass die Fehlerentstehungsrate abnimmt, bis die nächste grosse Neuerung eingeführt wird. Neuerungen haben oft geringere störungsbedingte Fehlerentstehungsraten, so dass die Fehlerentstehungsrate und damit der Defektanteil über mehrere »Sägezähne« abnimmt.

ξ Fehlerentstehungsrate.
MI Große Innovationen (Major innovations).
SI Kleine Verbesserungen (Small improvements).

Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 2.1: Würfelexperimente

X und Y seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«. Bestimmen Sie für die nachfolgenden verketteten Ereignisse jeweils

- die möglichen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die günstigen Ergebnisse und deren Anzahl,
- und daraus die Eintrittswahrscheinlichkeit bei gleicher Auftrittshäufigkeit aller möglichen Ergebnisse.

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

a) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis* $X + Y > 8$*?*

b) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis* $X > Y$*?*

c) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis* $(X = 5) \wedge (Y < 5)$*?*

d) *Wahrscheinlichkeit, dass* $X \cdot Y$ *durch drei teilbar ist?*

X, Y Zufallsvariablen für Würfelergebnisse.
$\mathbb{P}[\ldots]$ Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses ...

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

a) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis $X + Y > 8$?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 3+6, 4+5, 4+6, 5+4, bis 5+6, 6+3 bis 6+6
- Anzahl günstig: 1+2+3+4=10

$$\mathbb{P}\left[X + Y > 8\right] = \frac{10}{36}$$

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

b) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis $X > Y$?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 2>1, 3>1, 3>2, 4>1 bis 4>3, 5>1 bis 5>4, 6>1 bis 6>5
- Anzahl günstig: 1+2+3+4+5=15

$$\mathbb{P}[X > Y] = \frac{15}{36}$$

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

c) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis* $(X = 5) \wedge (Y < 5)$*?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (5,1) bis (5,4)
- Anzahl günstig: 4

$$\mathbb{P}\left[(X = 5) \wedge (Y < 5)\right] = \frac{4}{36}$$

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

d) *Wahrscheinlichkeit, dass $X \cdot Y$ durch drei teilbar ist?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (3,1) bis (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,1) bis (6,6), (1,6), (2,6), (4,6), (5,6)
- Anzahl günstig: 20

$$\mathbb{P}\left[(X \cdot Y)\,\%3 = 0\right] = \frac{20}{36}$$

$a\%b$ Divisionsrest.

Aufgabe 2.2: Verkettete Würfelereignisse

Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »Würfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden« und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der Ergebnisse ein?

Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »Würfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden« und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der Ergebnisse ein?

mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
1 bis 5,	6^{-1}
6+1 bis 6+5	6^{-2}
6+6+1 bis 6+6+5	6^{-3}
...	...

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten:

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6^3}+\ldots\overset{*}{=}5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}6^{-i}=5\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1\surd$$

* Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty}a_0\cdot q^n=\frac{a_0}{1-q}$.

Aufgabe 2.3: Fehlfunktionen durch Fehler

Ein System habe vier Fehler, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$ und $p_4 = 1\%$ bei einer Service-Leistung eine Fehlfunktion verursachen.

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

a) *Wie hoch ist die MF-Rate durch Fehler als Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der vier Fehler eine MF verursacht?*

b) *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass hintereinander zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?*

c) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht jeder der vier Fehler mindestens eine Fehlerfunktion bei 10 Service-Leistungen?*

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

Hilfestellung: Verwenden Sie folgende Ereignisdefinitionen:

$F_{i.j}$	Fehler i verursachen MF bei DS j, $\mathbb{P}[F_{i.j}] = p_i$
A_j	mindestens 1 MF durch einen der 4 Fehler bei DS j
B	keine MF durch einen der 4 Fehler bei einer der 10 DS
C	jeder Fehler i mindestens eine MF bei einer der 10 DS

DS	Erbrachte Service-Leistung.
MF	Fehlfunktion.
p_i	Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler i.

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

a) *Wie hoch ist die MF-Rate durch Fehler als Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der vier Fehler eine MF verursacht?*

$$\mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathbb{P}[A] \quad (2.4)$$

$$\mathbb{P}[A \wedge B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \quad (2.5)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_j, dass mindestens einer der 4 Fehler eine MF bei DS j verursacht:

$$\begin{aligned} A_j &= F_{1.j} \vee F_{2.j} \vee F_{3.j} \vee F_{4.j} \\ A_j &= \overline{\bar{F}_{1.j}\bar{F}_{2.j}\bar{F}_{3.j}\bar{F}_{4.j}} \\ \mathbb{P}[A_j] &= 1 - \prod_{i=1}^{4}(1-p_i) \\ &= 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}99 = 23{,}3\% \end{aligned}$$

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

b) *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass hintereinander zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?*

$$
\begin{aligned}
B &= \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{A}_{10} \\
\mathbb{P}[B] &= (1 - \mathbb{P}[A_j])^{10} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{4} (1 - p_i) \right)^{10} = 2\%
\end{aligned}
$$

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$, $p_4 = 1\%$

c) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht jeder der vier Fehler mindestens eine Fehlerfunktion bei 10 Service-Leistungen?*

$$\begin{aligned} C &= (F_{1.1} \vee \ldots \vee F_{1.10}) \wedge (F_{2.1} \vee \ldots \vee F_{2.10}) \wedge \ldots \wedge (F_{4.1} \vee \ldots \vee F_{4.10}) \\ &= \overline{\left(\bar{F}_{1.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{1.10}\right)} \wedge \overline{\left(\bar{F}_{2.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{2.10}\right)} \wedge \ldots \wedge \overline{\left(\bar{F}_{4.1} \wedge \ldots \wedge \bar{F}_{4.10}\right)} \\ \mathbb{P}[C] &= \prod_{i=1}^{4} 1 - (1 - p_i)^{10} \end{aligned}$$

p_i	10%	20%	5%	1%	$\mathbb{P}[C]$
$1 - (1 - p_i)^{10}$	65,1%	89,3%	40,1%	9,6%	2,24%

Aufgabe 2.4: Gewichteter Zufallstest

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung $\mathbf{x} = 11111110_2$ ist, wenn

a) *für alle Bitwerte* x_i *zufällig und unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit* $g = 50\%$ *bzw. 60% der Wert eins und sonst null gewählt wird?*

b) *in Abweichung zu Aufgabenteil a für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Bitwert gewählt wird?*

$g(\dots)$ Wichtung, Auftrittshäufigkeit des Signalwerts 1 .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung $\mathbf{x} = 11111110_2$ ist, wenn

a) *für alle Bitwerte x_i zufällig und unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit $g = 50\%$ bzw. 60% der Wert eins und sonst null gewählt wird?*

Beschreibung der Auswahl der Bitwerte $x_i = 1$ durch Ereignisse G_i mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten g_i:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_7 \wedge G_6 \wedge G_5 \wedge G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}[\mathbf{x} = 11111110_2] &= g^7 \cdot (1-g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} = 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$

G_i Ereignis Bit i gleich eins.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung $\mathbf{x} = 11111110_2$ ist, wenn

b) *in Abweichung zu Aufgabenteil a für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Bitwert gewählt wird?*

Für $G_7 = G_6 = G_5 = G_4$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}\left[\mathbf{x} = 11111110_2\right] &= g^4 \cdot (1-g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} = 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$
$G_7 = G_6 = G_5 = G_4$	$2^{-5} = 3\%$	$0{,}6^4 \cdot 0{,}4 = 5\%$

Aufgabe 2.5: Fehlerbaumanalyse

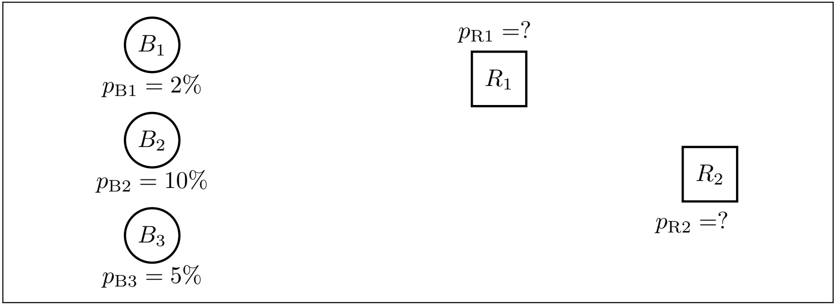
Ereignis R_1 tritt ein, wenn entweder B_1 und nicht B_2 oder nicht B_1 und B_2 eintritt. Ereignis R_2 tritt ein, wenn R_1 und B_3 eintreten. Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse: $p_{\mathrm{B1}} = 2\%$, $p_{\mathrm{B2}} = 10\%$, $p_{\mathrm{B3}} = 5\%$.

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*

b) *Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse R_1 und R_2?*

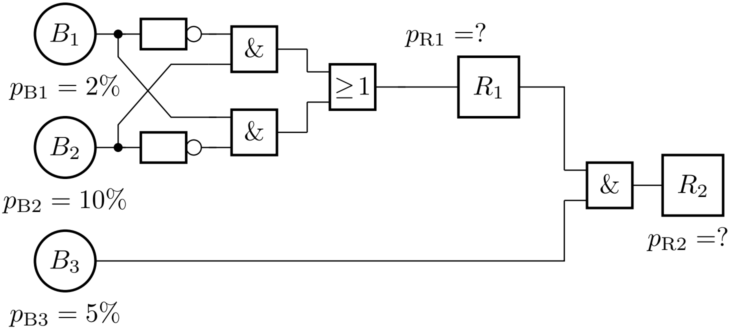
Ereignis R_1 tritt ein, wenn entweder B_1 und nicht B_2 oder nicht B_1 und B_2 eintritt. Ereignis R_2 tritt ein, wenn R_1 und B_3 eintreten. Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse: $p_{\mathrm{B1}} = 2\%$, $p_{\mathrm{B2}} = 10\%$, $p_{\mathrm{B3}} = 5\%$.

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*

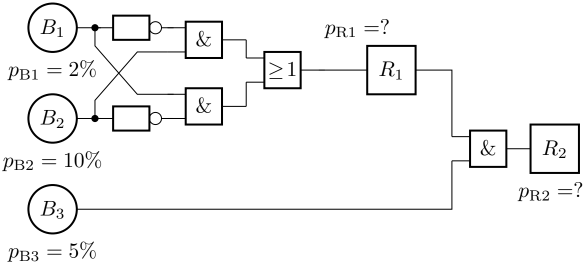


Ereignis R_1 tritt ein, wenn entweder B_1 und nicht B_2 oder nicht B_1 und B_2 eintritt. Ereignis R_2 tritt ein, wenn R_1 und B_3 eintreten. Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse: $p_{\mathrm{B1}} = 2\%$, $p_{\mathrm{B2}} = 10\%$, $p_{\mathrm{B3}} = 5\%$.

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*



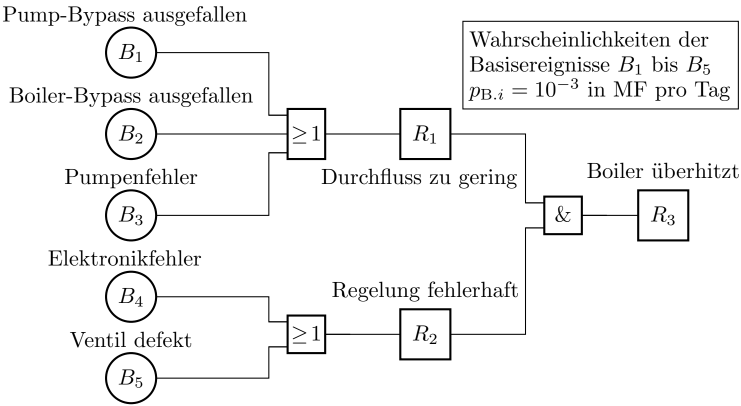
b) *Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse* R_1 *und* R_2*?*



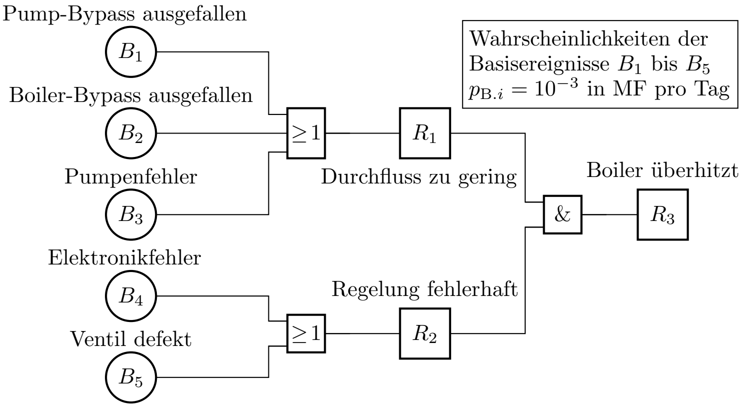
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[B_1 \wedge \bar{B}_2\right] &= p_{\mathrm{B1}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B2}}) = 2\% \cdot 90\% = 1{,}8\% \\
\mathbb{P}\left[B_2 \wedge \bar{B}_1\right] &= p_{\mathrm{B2}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B1}}) = 10\% \cdot 98\% = 9{,}8\% \\
R_1 &= \left(B_1 \wedge \bar{B}_2\right) \vee \left(B_2 \wedge \bar{B}_1\right)^* \\
\mathbb{P}[R_1] &= 1{,}8\% + 9{,}8\% = 11{,}6\% \\
\mathbb{P}[R_2] &= \mathbb{P}[R_1 \wedge B_3] = 11,6\% \cdot 5\% = 0{,}58\%
\end{aligned}$$

* $B_1 \wedge \bar{B}_2$ und $B_2 \wedge \bar{B}_1$ schließen sich gegenseitig aus.

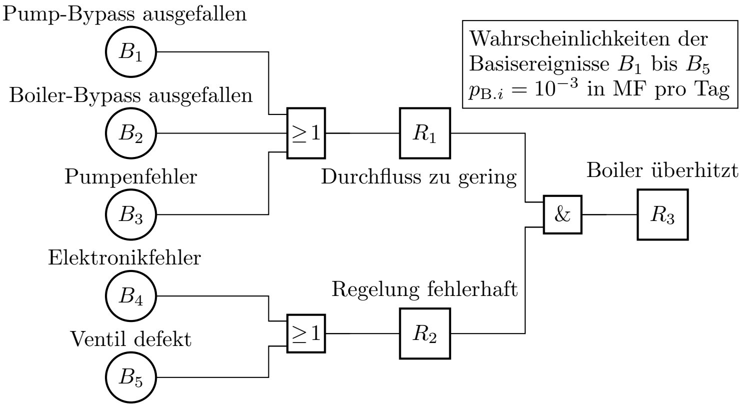
Aufgabe 2.6: Fehlerbaumauswertung



Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten p_{R1} bis p_{R3} der Fehlerereignisse R_1 bis R_3 pro Tag?



$$\begin{aligned} R_1 &= B_1 \vee B_2 \vee B_3 = \overline{\bar{B}_1 \wedge \bar{B}_2 \wedge \bar{B}_3} \\ p_{\mathrm{R1}} &= 1 - (1 - \mathbb{P}[B_1]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_2]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_3]) \\ &\approx \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[B_3] = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tag}^{-1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
R_2 &= B_4 \vee B_5 = \overline{\bar{B}_4 \wedge \bar{B}_5} \\
p_{\mathrm{R2}} &= 1 - (1 - \mathbb{P}[B_4]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_5]) \approx 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Tag}^{-1} \\
R_3 &= R_1 \wedge R_2 \\
p_{\mathrm{R3}} &= p_{\mathrm{R1}} \cdot p_{\mathrm{R2}} = 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Tag}^{-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.7: Wettervorhersage mit Markov-Kette

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

Zustände: R (Regen, Anfangszustand), S (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{\mathrm{RR}} = 75\%$, $p_{\mathrm{SS}} = 80\%$

a) *Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?*

b) *Aufstellen der Übergangsfunktion?*

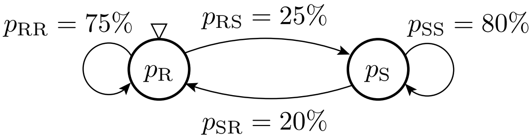
c) *Wenn es am Tag $i = 0$ regnet, wie groß ist für die Tage $i = 1$ bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?*

---

n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.
p_{R}	Zustand Regen.
p_{S}	Zustand Sonnenschein.
p_{ij}	Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i nach Zustand j mit $i, j \in \{R,\ S\}$.

Zustände: R (Regen, Anfangszustand), S (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{\mathrm{RR}} = 75\%$, $p_{\mathrm{SS}} = 80\%$

a) *Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?*



b) *Aufstellen der Übergangsfunktion?*

$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n}$$

Zustände: R (Regen, Anfangszustand), S (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_{\mathrm{RR}} = 75\%$, $p_{\mathrm{SS}} = 80\%$

$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n}$$

c) *Wenn es am Tag $i = 0$ regnet, wie groß ist für die Tage $i = 1$ bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?*

Tag	0	1	2	3	4
p_{R}	1	0,75	0,6125	0,53687	0,49528
p_{S}	0	0,25	0,3875	0,46313	0,50472

Aufgabe 2.8: Risikoanalyse

Eine schwerwiege Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand B nacheinander in höhere Riskozustände R_1 bis R_4 übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand B). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand R_4 tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation F ein.

a) *Beschreibung als Markov-Kette?*

b) *Programm zur Simulation der Markov-Kette?*

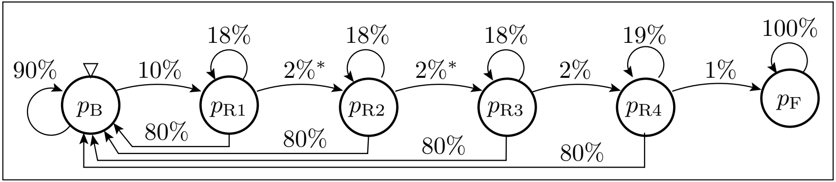
c) *Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für $n = 1$ bis 7 und $n = 10^6$?*

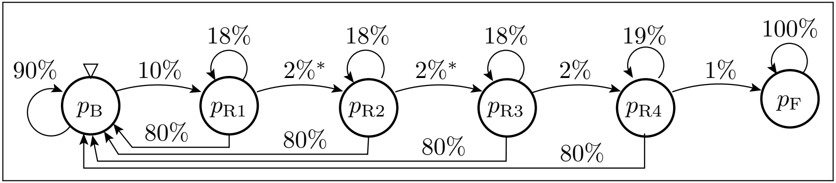
---

p_{B}	Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Grundzustand befindet.
$p_{\mathrm{R}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Risikozustands R_i befindet.
p_{F}	Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation eingetreten ist.

Eine schwerwiege Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand B nacheinander in höhere Riskozustände R_1 bis R_4 übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand B). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand R_4 tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation F ein.

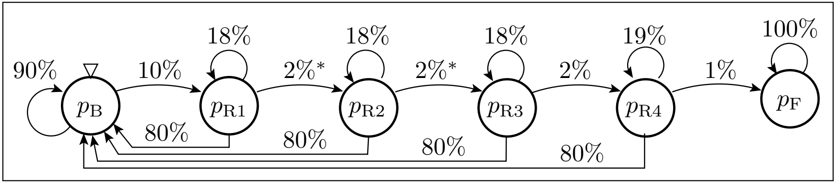
a) *Beschreibung als Markov-Kette?*





b) *Programm zur Simulation der Markov-Kette?*

```
PB = 100; PR1 = 0; PR2=0; PR3=0; PR4=0; PF=0;
print('  n|   P_G|    PR1|    PR2|    PR3|     PR4  |    PF');
for n in range(1,8):
 PB_n = PB*0.9 + PR1*0.8 + PR2*0.8 + PR3*0.8 + PR4*0.8;
 PR1_n = PB*0.10 + PR1*0.18;
 PR2_n = PR1*0.02 + PR2*0.18;
 PR3_n = PR2*0.02 + PR3*0.18;
 PR4_n = PR3*0.02 + PR4*0.19;
 PF = PR4*0.01 + PF;
 PB=PB_n; PR1=PR1_n; PR2=PR2_n; PR3=PR3_n; PR4=PR4_n;
 print('%3i|%6.3f| %6.3f|%6.3f|%6.3f|%8.6f|%8.6f'%(n,
   PB, PR1, PR2, PR3, PR4, PF))
```



c) *Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für* $n = 1$ *bis 7 und* $n = 10^6$*?*

n	p_{B}	p_{R1}	p_{R2}	p_{R3}	p_{R4}	p_{F}
1	90,000%	10,000%	0,000%	0,000%	0,000000%	0,000000%
2	89,000%	10,800%	0,200%	0,000%	0,000000%	0,000000%
3	88,900%	10,844%	0,252%	0,004%	0,000000%	0,000000%
4	88,890%	10,842%	0,260%	0,006%	0,000080%	0,000000%
5	88,889%	10,841%	0,264%	0,006%	0,000130%	0,000001%
6	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000150%	0,000002%
7	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000157%	0,000004%
10^6	87,485%	10,669%	0,260%	0,006%	0,000157%	1,579632%

Fehlernachweis

Aufgabe 2.9: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

a) *Wie hoch sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 für die beiden lokalisierbaren Fehler?*

b) *Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare lokalisierbare Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?*

c) *Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden lokalisierbare Fehler beseitigt sind?*

MF	Fehlfunktion.
p_i	Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler i.

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

a) *Wie hoch sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 für die beiden lokalisierbaren Fehler?*

Die Nachweiswahrscheinlichkeiten sind die vorgegebenen Fehlfunktionsraten:

$$p_1 = \zeta_1 = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$$
$$p_2 = \zeta_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

ζ_i Fehlfunktionsrate von Fehler i (Malfunction rate of fault i).

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

b) *Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare lokalisierbare Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?*

$$p_i(N) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot N} \tag{2.9}$$

Schlechter nachweisbar ist Fehler 2 mit:

$$\zeta_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

Erforderliche Testsatzlänge für den 99%igen Nachweis:

$$\begin{aligned} p_2(N) &= 1 - \mathrm{e}^{-n \cdot \zeta_2} \geq 99\% \\ N &\geq -\frac{\ln(1 - 99\%)}{p_2} = 2{,}3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

N Anzahl der Tests.

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

c) *Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden lokalisierbare Fehler beseitigt sind?*

$$R = 1/\zeta \tag{1.11}$$

Die beiden Fehler verursachen 90% der MF. Ihre Beseitigung verringert die Häufigkeit der MF auf 10%, also im Mittel auf jede 10^5-ten Service-Leistung:

$$\zeta = 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$$

Zuverlässigkeit als Kehrwert der MF-Rate:

$$R = 10^5\ \left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

R Zuverlässigkeit (Reliability).

$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$ Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

Aufgabe 2.10: Testsatzlänge RAM-Test

Für einen Speicher mit 2^{32} Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der 2^{32} Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

a) *Ab welcher Testsatzlänge N in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 99\%$?*

b) *Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei 10^8 Speicherzugriffen pro Sekunde?*

N Anzahl der Tests.

Für einen Speicher mit 2^{32} Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der 2^{32} Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

a) *Ab welcher Testsatzlänge N in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 99\%$?*

$$p_i(N) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot N} \tag{2.9}$$

Unterere Schranke der Fehlfunktionsrate je Speicherzugriff:

$$\zeta_{\min} = \left(50 \cdot 2^{32}\right)^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei N Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(N) = 1 - \mathrm{e}^{-n \cdot \zeta_{\min}} \geq 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$N \geq -\ln(1 - 99\%) \cdot \frac{1}{p_{\min}} = -\ln(1\%) \cdot 50 \cdot 2^{32} \approx 10^{12}$$

Für einen Speicher mit 2^{32} Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der 2^{32} Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

b) *Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei 10^8 Speicherzugriffen pro Sekunde?*

Mindesttestdauer:

$$\begin{aligned} t &= N \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \\ &= 10^{12} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} = 2{,}75\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

$p_i(N)$	Nachweiswahrscheinlichkeit von Fehler i mit N Tests.
$\zeta_{\min}$	Mindestfehlfunktionsrate der unterstellten Fehler.
$p_{\min}$	Mindestnachweiswahrscheinlichkeit der unterstellten Fehler.

Aufgabe 2.11: RAM-Kopplungsfehler

Schreiben einer 1 in Zelle i verändert Zelle j von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

- Schreibe 0 in Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$
- Schreibe 1 in Zelle i, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$
- Lese Zelle j ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \# A}$.

$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \# A}$.

a) *Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?*

b) *MF-Rate ζ_{CP} des Fehlers als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlernachweis in Schritt N, wenn bis Schritt $N-1$ noch nicht nachweisbar?*

$\# A$	Anzahl der Adressen.
ζ_{CP}	Fehlfunktionsrate des RAM-Kopplungsfehlers.
N	Anzahl der Tests.

$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2\cdot\#A}$.

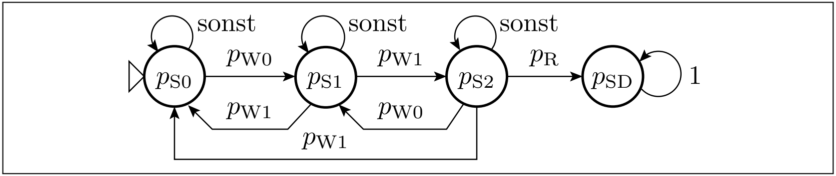
c) *Simulationsprogramm mit* $\#A = 128$ *für* $N = 1$ *bis 5000?*

d) *Darstellung der MF-Rate und Abschätzung der Anzahl der Initialisierungsschritte, bis sich eine konstante MF-Rate einstellt.*

p_{W0}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_{W1}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_{R}	Wahrscheinlichkeit, dass die Speicherzelle gelesen wird.

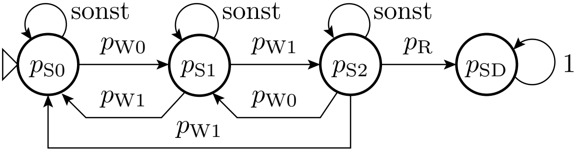
$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \# A}$.

a) *Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?*



$p_{\mathrm{S}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
p_{SD}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand »Fehler nachgewiesen« ist.

$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4 \cdot \# A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2 \cdot \# A}$.

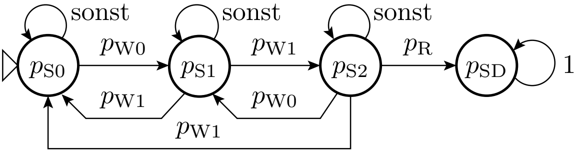


b) *MF-Rate ζ_{CP} des Fehlers als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlernachweis in Schritt N, wenn bis Schritt $N-1$ noch nicht nachweisbar?*

$$\zeta_{\mathrm{CP}}(N+1) = \frac{p_{\mathrm{SD}}(N+1) - p_{\mathrm{SD}}(N)}{1 - p_{\mathrm{SD}}(N)}$$

Vermeidung numerischer Probleme durch kleiner Differenzen großer Zahlen:

$$\zeta_{\mathrm{CP}}(N+1) = \frac{p_{\mathrm{S2}}(N) \cdot p_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{S0}}(N) + p_{\mathrm{S1}}(N) + p_{\mathrm{S2}}(N)}$$

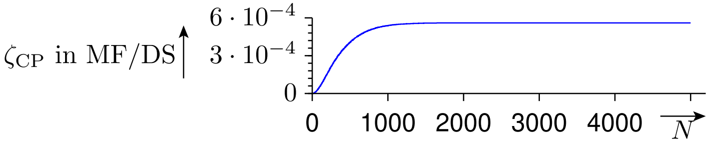


c) *Simulationsprogramm mit* $\#A = 128$ *für* $N = 1$ *bis 5000?*

```
pS0=1; pS1=0; pS2=0; pSD(1)=0;
A=128; pR = 1/(2*A); pW = 1/(4*A);
for N = 5000;
  pS0_nxt = pS0 * (1-pW) + pS1*pW + pS2*pW;
  pS1_nxt = pS0 * pW  + pS1*(1-pW-pR) + pS2*pW;
  pS2_nxt = pS1 * pR  + pS2*(1-2*pW-pR);
  pSD = pSD(n) + pS2 * pR;
  zeta_CP(N) = pS2*pR / (pS0+pS1+pS2);
  pS0=pS0_nxt; pS1=pS1_nxt; pS2=pS2_nxt;
end;
plot(1:5000, zeta_CP);
```

$p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$, $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$ und $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2\cdot\#A}$.

d) *Darstellung der MF-Rate und Abschätzung der Anzahl der Initialisierungsschritte, bis sich eine konstante MF-Rate einstellt.*



Ab $N_{\mathrm{I}} \approx 1000$ bleibt der relative Wahrscheinlichkeitszuwachs konstant $\zeta \approx 5{,}7\cdot 10^{-6}$. Zunahme der Nachweiswahrscheinlichkeit mit der Testanzahl:

$$1 - \mathrm{e}^{-N\cdot\zeta_{\mathrm{CP}}} \le p_{\mathrm{CP}}(N) \le 1 - \mathrm{e}^{-(N-N_{\mathrm{I}})\cdot\zeta_{\mathrm{CP}}}$$

Für $N \gg N_{\mathrm{I}}$ wie »ohne Gedächtnis«.

N_{I} Anzahl der Initialisierungsschritte.
$p_{\mathrm{CP}}(N)$ Nachweiswahrscheinlichkeit des RAM-Kopplungsfehler als Funktion der Testanzahl N.

Fehlerbeseitigung

Aufgabe 2.12: Defektanteil nach Ersatz

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute $Y = 60\%$ und der Test erkennt $DC = 90\%$ der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) *Wie groß ist der Defektanteil DL_{M} der Geräte nach der Fertigung?*

b) *Wie hoch ist der zu erwartende Defektanteil DL nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?*

Y	Ausbeute (Yield).
DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.
DL	Defektanteil nach Ersatz der Produkte mit erkannten Fehlern.

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute $Y = 60\%$ und der Test erkennt $DC = 90\%$ der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) *Wie groß ist der Defektanteil DL_{M} der Geräte nach der Fertigung?*

$$Y = 1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC \tag{1.84}$$

$$\boxed{DL_{\mathrm{M}} = \frac{1-Y}{DC} \approx \frac{1-60\%}{90\%} = 44{,}4\% = 0{,}444\,\mathrm{dpu}}$$

dpu Anteil der fehlerhaften Objekte (defecs per unit).

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute $Y = 60\%$ und der Test erkennt $DC = 90\%$ der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

b) *Wie hoch ist der zu erwartende Defektanteil DL nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?*

$$DL = \frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot (1 - DC)}{1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} \tag{1.85}$$

$$DL = \frac{44{,}4\% \cdot (1 - 90\%)}{1 - 44{,}4\% \cdot 90\%} = 0{,}074\,\mathrm{dpu} = 74.000\,\mathrm{dpm}$$

Etwa noch jedes 14. Gerät ist fehlerhaft.

dpm Anzahl der defekten Objekte von einer Million (defecs per million).

Aufgabe 2.13: Fehlerüberdeckung Schaltkreistest

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei $Y = 80\%$ und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei $DL = 1000$ dpm.

a) *Auf welche Defektüberdeckung DC der Tests lässt das schließen?*

b) *Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf $Y = 30\%$ durch eine technologische Umstellung auf den Defektanteil der gefertigten Schaltkreise aus?*

Y	Ausbeute (Yield).
DL	Defektanteil nach Ersatz der Produkte mit erkannten Fehlern.
dpm	Anzahl der defekten Objekte von einer Million (defecs per million).
DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei $Y = 80\%$ und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei $DL = 1000$ dpm.

a) *Auf welche Defektüberdeckung DC der Tests lässt das schließen?*

$$DL = \frac{(1-Y)\cdot(1-DC)}{DC\cdot Y} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} DC &= \frac{1-Y}{DL+1-Y} \\ &= \frac{1-80\%}{10^{-3}\cdot 80\% + 1 - 80\%} = 99{,}6\% \end{aligned}$$

Ist eine so hohe Defektüberdeckung für Schaltkreise realistisch oder beziehen sich die Angaben zum Defektanteil auf den viel geringeren Anteil der von Geräteherstellern reklamierten Schaltkreise mit nachweisbaren Fertigungsfehlern?

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei $Y = 80\%$ und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei $DL = 1000$ dpm.

b) *Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf $Y = 30\%$ durch eine technologische Umstellung auf den Defektanteil der gefertigten Schaltkreise aus?*

$$DL = \frac{(1-Y)\cdot(1-DC)}{DC\cdot Y} \quad (1.86)$$

Defektüberdeckung aus Aufgabenteil a $DC = 99{,}6\%$. Anstieg des Defektanteil der getesteten Bauteile auf:

$$DL = \frac{(1-30\%)\cdot(1-99{,}6\%)}{99{,}6\%\cdot 30\%} = 9{,}3\cdot 10^{-3} \gg 1000\,\mathrm{DPM}$$

Ein Ausbeuteeinbruch von 80% auf 30% bewirkt, dass sich der Defektanteil der getesteten und ausgelieferten Schaltkreise fast verzehnfacht.

Aufgabe 2.14: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (1)

Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von 60%.

$\mu_{\mathrm{FPT}} = 20$, $p_{\mathrm{FD}} = 60\%$

a) *Wie groß darf die Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler μ_{RF} maximal sein, damit sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mindestens halbiert?*

b) *Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate ξ_{R} (neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur $p_{\mathrm{R}} = 30\%$ beträgt?*

μ_{FPT}	Zu erwartende Fehleranzahl nach Vortests und Fehlerbeseitigung.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.

$\mu_{\mathrm{FPT}} = 20$, $p_{\mathrm{FD}} = 60\%$

a) *Wie groß darf die Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler μ_{RF} maximal sein, damit sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mindestens halbiert?*

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})\cdot\mu_{\mathrm{CF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \tag{2.15}$$

Anteil der nicht beseitigt Fehler mit μ_{FPT} statt μ_{CF} als Anfangsfehlerzahl:

$$\frac{\mu_{\mathrm{F}}}{\mu_{\mathrm{FPT}}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})\cdot}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \leq 0{,}5$$

Aufgelöst nach der Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} \leq 1 - \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})}{0{,}5} = 1 - \frac{(1-0{,}6)}{0{,}5} = 0{,}2$$

μ_{F}	zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.

$\mu_{\mathrm{FPT}} = 20$, $p_{\mathrm{FD}} = 60\%$

b) *Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate* ξ_{R} *(neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur* $p_{\mathrm{R}} = 30\%$ *beträgt?*

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \qquad (2.14)$$

Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler nach Aufgabenteil a:

$$\eta_{\mathrm{RF}} \quad \leq \quad \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} = 0{,}2$$

Gl. 2.14 aufgelöst nach der Fehlerentstehungsrate:

$$\xi_{\mathrm{R}} \leq \frac{p_{\mathrm{R}} \cdot \eta_{\mathrm{RF}}}{p_{\mathrm{FD}}} = \frac{30\% \cdot 0{,}2}{60\%} = 0{,}1$$

Im Mittel nicht mehr als ein neu entstehender Fehler bei 10 Reparaturversuchen.

Aufgabe 2.15: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (2)

Der Test eines Programms erkennt 95% der 100 entstandenen Fehler. Die Beseitigung eines erkannten Fehler erfordert im Mittel 5 Reparaturversuche und bei 10 Reparaturversuchen entsteht im Mittel 1 neuer Fehler.

$\mu_{\mathrm{CF}} = 100$, $p_{\mathrm{FD}} = 95\%$, $p_{\mathrm{R}} = 1/5$, $\xi_{\mathrm{R}} = 1/10$

a) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler μ_{F}?*

b) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler μ_{F}, wenn der Verzicht auf Rückbau die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch auf 20% verdoppelt?*

μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.
μ_{F}	zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.

$\mu_{\mathrm{CF}} = 100$, $p_{\mathrm{FD}} = 95\%$, $p_{\mathrm{R}} = 1/5$, $\xi_{\mathrm{R}} = 1/10$

a) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler* μ_{F}*?*

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \tag{2.14}$$

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{CF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \tag{2.15}$$

Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{95\% \cdot 10\%}{20\%} = 0{,}475$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-95\%) \cdot 100}{1-0{,}475} = 9{,}52$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 4,5 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler.

$\mu_{\mathrm{CF}} = 100$, $p_{\mathrm{FD}} = 95\%$, $p_{\mathrm{R}} = 1/5$, $\xi_{\mathrm{R}} = 1/10$

b) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler μ_{F}, wenn der Verzicht auf Rückbau die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch auf 20% verdoppelt?*

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \tag{2.14}$$

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{CF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \tag{2.15}$$

Zu erwartende Anzahl neuer je beseitigter Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{95\% \cdot 20\%}{20\%} = 0{,}95$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-95\%) \cdot 100}{1-0{,}95} = 100$$

Beseitigung ≈ 95 ursprüngliche Fehlern. Dabei entstehen $\approx \frac{\mu_{\mathrm{CF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} - \mu_{\mathrm{CF}} = 1900$ neue Fehler, von denen ≈ 1805 beseitigt werden. Keine Abnahme der zu erwartende Fehleranzahl, aber Zunahme der Zuverlässigkeit, weil Tests bevorzugt Fehler mit hoher MF-Rate erkennen.

Aufgabe 2.16: Reifeprozess mit neu entstehenden Fehlern

Fehleranzahl und MF-Rate Vorlesungsbeispiel (siehe Folie 2.95):

$\mu_\mathrm{F}(0) = 100$, $N_\mathrm{T} = 10^5$, $N_\mathrm{MV} = 10^6$, $\eta_\mathrm{RFR} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

	$\mu_\mathrm{F}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	100	38,32	29,59
$v=1$	0	6,17	2,36
$v=2$	0	0	1,25
$\mu_\mathrm{F}(u)$	100	44,49	33,21

	$\zeta_\mathrm{F}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	$4\cdot10^{-4}$	$1{,}39\cdot10^{-5}$	$5{,}64\cdot10^{-6}$
$v=1$	0	$2{,}47\cdot10^{-5}$	$8{,}59\cdot10^{-7}$
$v=2$	0	0	$5{,}02\cdot10^{-6}$
$\zeta_\mathrm{F}(u)$	$4\cdot10^{-4}$	$3{,}86\cdot10^{-5}$	$1{,}15\cdot10^{-5}$

a) *Um wie viele Prozent erhöht die Fehlerentstehungsrate $\eta_\mathrm{RFR} = 0{,}1$ neue je beseitigter Fehler die Anzahl der nicht beseitigten Fehler?*

$\mu_\mathrm{F}(0)$	Erwartete Anzahl Fehler in Version 0 (erste freigegebene Version).
N_T	Effektive Testanzahl Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.
N_MV	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
η_RFR	Neu entstehende Fehler je ursprünglicher Fehler rekursiv.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.
$u,\ v$	Versionnummern des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...

$\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

	$\mu_{\mathrm{F}}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	100	38,32	29,59
$v=1$	0	6,17	2,36
$v=2$	0	0	1,25
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	44,49	33,21

	$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$		
u	0	1	2
$v=0$	$4\cdot10^{-4}$	$1{,}39\cdot10^{-5}$	$5{,}64\cdot10^{-6}$
$v=1$	0	$2{,}47\cdot10^{-5}$	$8{,}59\cdot10^{-7}$
$v=2$	0	0	$5{,}02\cdot10^{-6}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot10^{-4}$	$3{,}86\cdot10^{-5}$	$1{,}15\cdot10^{-5}$

b) *Warum verdoppelt eine Fehlerentstehungsrate $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$ neue je beseitigter Fehler etwa die MF-Rate?*

c) *Neuberechung der Tabellen für den halben Testaufwand vor Versionsfreigabe auf $N_{\mathrm{T}} = 5\cdot10^4$. Welchen Einfluss hat das auf die Anzahl der nicht beseitigten Fehler und die MF-Rate durch diese?*

$\mu_{\mathrm{F}}(u,v)$	Erwartete Anzahl Fehler, die in Version v entstanden und in Version u nicht beseitigt sind.
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Versionszahl.
$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$	MF-Rate in Version u verursacht von Fehlern die in Version v entstanden sind.
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	Gesamte Fehlfunktionsrate in Version u.

$\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

a) *Um wie viele Prozent erhöht die Fehlerentstehungsrate* $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$ *neue je beseitigter Fehler die Anzahl der nicht beseitigten Fehler?*

$$p_{\mathrm{NE}}(u,v) = \left(\frac{(u-v)\cdot N_{\mathrm{MV}} + N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K} \quad (2.20)$$

$$p_{\mathrm{NE}}(1,0) = p_{\mathrm{NE}}(2,1) = \left(\frac{N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K} = 38{,}32\%$$

$$p_{\mathrm{NE}}(2,0) = \left(\frac{2\cdot N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K} = 29{,}59\%$$

u	0	1	2
$v=0$	100	$\mu_{\mathrm{F}}(0)\cdot p_{\mathrm{NE}}(1,0)$ $= 100\cdot 38{,}3\% = 38{,}32$	$\mu_{\mathrm{F}}(0)\cdot p_{\mathrm{NE}}(2,0)$ $= 100\cdot 29{,}6\% = 29{,}6$
$v=1$	0	$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(0)-\mu_{\mathrm{F}}(1,0)}{10} = \frac{100-38{,}3}{10} = 6{,}17$	$\mu_{\mathrm{F}}(1,1)\cdot p_{\mathrm{NE}}(2,1)$ $= 6{,}17\cdot 38{,}32\% = 2{,}36$
$v=2$	0	0	$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(1)-\sum_{v=0}^{1}\mu_{\mathrm{F}}(2.v)}{10}$ $\frac{44{,}49-29{,}59-2{,}36}{10} = 1{,}25$
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	$38{,}32+6{,}17=44{,}49$	$29{,}59+2{,}36+1{,}25=33{,}21$

1. Version: 34%, 2. Versinon 12%.

$\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

b) *Warum verdoppelt eine Fehlerentstehungsrate* $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$ *neue je beseitigter Fehler etwa die MF-Rate?*

$$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v) = k \cdot \frac{\mu_{\mathrm{F}}(u,v)}{n_{\mathrm{u}}(u,v)} \tag{2.24}$$

u	0	1	2
$v=0$	$\frac{0{,}4\cdot 100}{10^5} = 4\cdot 10^{-4}$	$\frac{0{,}4\cdot 44{,}49}{1{,}1\cdot 10^6} = 1{,}39\cdot 10^{-5}$	$\frac{0{,}4\cdot 33{,}21}{2{,}1\cdot 10^6} = 5{,}64\cdot 10^{-6}$
$v=1$	0	$\frac{0{,}4\cdot 6{,}17}{10^5} = 2{,}47\cdot 10^{-5}$	$\frac{0{,}4\cdot 2{,}36}{1{,}1\cdot 10^6} = 8{,}59\cdot 10^{-7}$
$v=2$	0	0	$\frac{0{,}4\cdot 1{,}25}{10^5} = 5{,}02\cdot 10^{-6}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot 10^{-4}$	$3{,}86\cdot 10^{-5}$	$1{,}15\cdot 10^{-5}$

Die MF-Rate wird von den in jeder Version neu entstandenen Fehlern dominiert, bei denen unter dem Bruchstrich eine effektive Testsatzlänge von 10^5 statt ein Vielfaches von 10^6 steht.

$\mu_F(0) = 100$, $N_T = 10^5$, $N_{MV} = 10^6$, $\eta_{RFR} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

c) *Neuberechung der Tabellen für den halben Testaufwand vor Versionsfreigabe auf $N_T = 5 \cdot 10^4$. Welchen Einfluss hat das auf die Anzahl der nicht beseitigten Fehler und die MF-Rate durch diese?*

	$\mu_F(u,v)$ für $N_T = 10^5$		
u	0	1	2
$v=0$	100	38,32	29,59
$v=1$	0	6,17	2,36
$v=2$	0	0	1,25
$\mu_F(u)$	100	44,49	33,21

$\mu_F(u,v)$ für $N_T = 5 \cdot 10^4$		
0	1	2
100	29,59	22,64
0	7,04	2,08
0	0	1,19
100	36,63	25,91

Größere Abnahme der Fehleranzahl von grün nach rechts auf 29,6%, statt 38,3% wegen 21-facher statt 11-facher Testsatzlänge. Mehr entstehende Fehler von grün nach grün eins tiefer, weil von den 10% neu entstehenden Fehlern mit nur halb so vielen Tests weniger beseitigt werden. Insgesamt weniger Fehler, weil links von 100 entstandenen Fehlern 61,7 und rechts 70,4 in der Entstehungsversion übrig bleiben.

$\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

	$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$ für $N_{\mathrm{T}} = 10^5$			$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$ für $N_{\mathrm{T}} = 5\cdot 10^4$		
u	0	1	2	0	1	2
$v=0$	$\frac{K\cdot 100}{10^5} = 4\cdot 10^{-4}$	$\frac{K\cdot 38{,}2}{11\cdot 10^5} = 1,4\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 29{,}6}{21\cdot 10^5} = 5{,}6\cdot 10^{-6}$	$\frac{K\cdot 100}{5\cdot 10^4} = 8\cdot 10^{-4}$	$\frac{K\cdot 29{,}6}{10{,}5\cdot 10^5} = 1,1\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 22{,}6}{20{,}5\cdot 10^5} = 4,4\cdot 10^{-6}$
$v=1$	0	$\frac{K\cdot 6{,}2}{10^5} = 2{,}5\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 2{,}3}{11\cdot 10^5} = 8{,}6\cdot 10^{-7}$	0	$\frac{K\cdot 6{,}2}{5\cdot 10^4} = 5{,}6\cdot 10^{-5}$	$\frac{K\cdot 2{,}1}{11\cdot 10^5} = 7{,}9\cdot 10^{-7}$
$v=2$	0	0	$\frac{K\cdot 1{,}2}{10^5} = 5{,}0\cdot 10^{-6}$	0	0	$\frac{K\cdot 1{,}2}{5\cdot 10^4} = 9,5\cdot 10^{-6}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot 10^{-4}$	$3{,}9\cdot 10^{-5}$	$1{,}2\cdot 10^{-5}$	$8\cdot 10^{-4}$	$6{,}7\cdot 10^{-5}$	$1{,}5\cdot 10^{-5}$

Bei gleicher Anzahl haben die neu entstandenen nicht beseitigten Fehler in jeder Version die doppelte MF-Rate wie bei der doppelten Testanzahl vor dem Einsatz. Nicht nur doppelte, sondern ca. dreifache MF-Rate im Vergleich zu einem Reifeprozesss, bei dem bei der Beseitigung keine neuen Fehler entstehen.

Verteilungen

Verteilung

Aufgabe 3.1: Erwartungswert, Varianz diskrete Verteilung

Gegeben ist die diskrete Verteilung der Werte x_i:

x_i	5	6	8	11	22
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) *Wie groß ist der Erwartungswert?*

b) *Wie groß sind Varianz und Standardabweichung?*

x_i	5	6	8	11	22
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) *Wie groß ist der Erwartungswert?*

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i=1}^{\#x} p_i \cdot x_i \tag{3.4}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[X\right] = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}1 \cdot 22 = 9{,}3}$$

x_i	5	6	8	11	22
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

b) *Wie groß sind Varianz und Standardabweichung?*

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right] \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}\left[X\right]^2 \tag{3.11}$$

$$\mathrm{sd}\left[X\right]=\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]} \tag{3.7}$$

Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= 0{,}1\cdot(5-9{,}3)^2+0{,}2\cdot(6-9{,}3)^2+0{,}4\cdot(8-9{,}3)^2\\ &+ 0{,}2\cdot(11-9{,}3)^2+0{,}1\cdot(22-9{,}3)^2=21{,}4\end{aligned}$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= 0{,}1\cdot 5^2+0{,}2\cdot 6^2+0{,}4\cdot 8^2+0{,}2\cdot 11^2\\ &+ 0{,}1\cdot 22^2-9{,}3^2=21{,}4\end{aligned}$$

Standardabweichung: $\mathrm{sd}\left[X\right]=\sqrt{21{,}4}=4{,}63$

Aufgabe 3.2: Erwartungswert, Varianz Datenstichprobe

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler v_i bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

a) *den Erwartungswert.*

b) *die Varianz.*

c) *die Standardabweichung.*

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

a) *den Erwartungswert.*

$$\hat{\mathbb{E}}\left[X\right] = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i \qquad (3.15)$$

$$\boxed{\hat{\mathbb{E}}\left[X\right] = \frac{1}{10} \cdot (58 + 49 + \ldots + 66) \quad = \quad 50{,}7}$$

b) *die Varianz.*

$$\hat{\mathrm{Var}}\left[X\right] = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2 \qquad (3.16)$$

$$\boxed{\hat{\mathrm{Var}}\left[X\right] = \frac{1}{9} \cdot \left((58 - 50{,}7)^2 + (49 - 50{,}7)^2 + \ldots\right) = 140}$$

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

c) *die Standardabweichung.*

$$\hat{\mathrm{sd}}\,[X] = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}\,[X]} \tag{3.17}$$

$$\boxed{\hat{\mathrm{sd}}\,[X] = \sqrt{140} = 11{,}8}$$

Aufgabe 3.3: Varianz einer linearen Transformation

Kontrollieren Sie die Gleichungen für die Varianz einer linearen Transformation:

$$\mathrm{Var}\left[a \cdot X + b\right] = a^2 \cdot \mathrm{Var}\left[X\right] \tag{3.19}$$

für eine diskrete Zufallsgröße X, die $\#x$ verschiedene Wert x_i annehmen kann.

$\mathrm{Var}\left[\ldots\right]$	Varianz von ...
$a,\ b$	Beliebige reele Zahlen.
X	Zufallsvariable.

Kontrollieren Sie

$$\mathrm{Var}\left[a\cdot X+b\right]=a^2\cdot\mathrm{Var}\left[X\right] \tag{3.19}$$

$$\mathrm{Var}\left[X\right]=\sum_{i=1}^{\#x}p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[a\cdot X+b\right] &= \sum_{i=1}^{\#x}p_i\cdot\left(a\cdot x_i+b-\left(a\cdot\mathbb{E}\left[X\right]+b\right)\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{\#x}p_i\cdot\left(a\cdot x_i-a\cdot\mathbb{E}\left[X\right]+\underbrace{b-b}_{0}\right)^2\\ &= a^2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#x}p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[X]}\ \checkmark\end{aligned}$$

$\#x$	Anzahl der möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen X.
x_i	Realisierung (möglichen Wert) i der Zuvallsvariablen X.

Aufgabe 3.4: Varianz Summe

Zeigen Sie für zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y, dass die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] + 2\cdot\mathrm{Cov}\left[X,Y\right] \qquad (3.21)$$

$$\mathrm{Cov}\left[X,Y\right] = \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right] \qquad (3.22)$$

Hilfestellung: Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y:

$$\mathrm{Cov}\left[X,Y\right] = \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right)\right)$$

X, Y	Zufallsvariablen.
$\mathbb{E}\left[\ldots\right]$	Erwartungswert von ...
$\mathrm{Var}\left[\ldots\right]$	Varianz von ...
$\mathrm{Cov}[X,Y]$	Kovarianz der beiden Zuvallsvariablen.
$\#x$, $\#y$	Anzahl der möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen X und Y.
x_i, y_j	Realisierung (möglichen Wert) der Zuvallsvariablen X und Y.
p_j	Eintrittswahrscheinlichkeit der Realisierung x_i und y_j.

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] + 2\cdot \mathrm{Cov}\left[X,Y\right] \tag{3.21}$$

$$\mathrm{Cov}\left[X,Y\right] = \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right] \tag{3.22}$$

$\mathrm{Var}\left[X+Y\right]$ ist die mittlere quadratische Abweichung der Summe $X+Y$ vom Erwartungswert $\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right]$:

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]+y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left(\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2+\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2+2\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right)\right)\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{\#x} p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[X]}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{\#y} p_j}_{1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\#y} p_j\cdot\left(y_j-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[Y]}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#x} p_i}_{1}$$

$$+2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#x}\left(\sum_{j=1}^{\#y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right)\right)}_{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y]))=\mathrm{Cov}[X,Y]}$$

Aufgabe 3.5: Erwartungswert und Varianz Turmhöhe

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von $\mathbb{E}[h_\mathrm{B}] = 3\,\mathrm{cm}$ mit einer Standardabweichung von $\mathrm{sd}[h_\mathrm{B}] = 1\,\mathrm{mm}$ haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms $h_\mathrm{T} = 3 \cdot h_\mathrm{B}$? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$h_\mathrm{B}, h_\mathrm{T}$	Baustein- und Turmhöhe.
$\mathbb{E}[\ldots]$	Erwartungswert von ...
$\mathrm{Var}[\ldots]$	Varianz von ...
$\mathrm{sd}[\ldots]$	Standardabweichung von ...

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von $\mathbb{E}\left[h_{\mathrm{B}}\right] = 3\,\mathrm{cm}$ mit einer Standardabweichung von $\mathrm{sd}\left[h_{\mathrm{B}}\right] = 1\,\mathrm{mm}$ haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms $h_{\mathrm{T}} = 3 \cdot h_{\mathrm{B}}$? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$$\mathbb{E}\left[X+Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right] \tag{3.20}$$

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] \tag{3.23}$$

$$\mathrm{sd}\left[X\right] = \sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]} \tag{3.7}$$

Erwartungswert der Summe:

$$\mathbb{E}\left[h_{\mathrm{T}}\right] = 3 \cdot \mathbb{E}\left[h_{\mathrm{B}}\right] = 9\,\mathrm{cm}$$

Varianzen und Standardabweichung der Summe:

$$\mathrm{Var}\left[h_{\mathrm{T}}\right] = 3 \cdot \mathrm{Var}\left[h_{\mathrm{B}}\right] = 3\,\mathrm{mm}^2$$

$$\mathrm{sd}\left[h_{\mathrm{T}}\right] = \sqrt{\mathrm{Var}\left[h_{\mathrm{T}}\right]} = \sqrt{3}\,\mathrm{mm}$$

Aufgabe 3.6: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i = 1$ bis 5 seinen unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten nachweisbar:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

a) *Berechung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?*

b) *Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?*

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

a) *Berechung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?*

$\mathbb{P}_1[X=0] = 1 - p_1$

$\mathbb{P}_1[X=1] = p_1$

`Wiederhole für` $i = 2$ `bis` n

$\mathbb{P}_i[X=i] = \mathbb{P}_{i-1}[X=i-1] \cdot p_i$

Fehler	0	1	2	3	4	
$\mathbb{P}_1[X_1 = i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2[X_1 + X_2 = i]$			2%			
$\mathbb{P}_3[X_1 + X_2 + X_3 = i]$				0,8%		
...						

p_i Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis von Zählversuch i eins ist.
n Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
X_i Potentielle Zählwerte, Zufallsvariablen mit Wertebereich $X_i \in \{0, 1\}$.

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

a) *Berechung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?*

```
Wiederhole für i = 2 bis n
```
$$\mathbb{P}_i(X=0) = \mathbb{P}_{i-1}(X=0)\cdot(1-p_i)$$
$$\mathbb{P}_i(X=i) = \mathbb{P}_{i-1}(X=i-1)\cdot p_i$$

```
    Wiederhole für k = 1 bis i − 1
```
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(X=k) \quad &= \mathbb{P}_{i-1}(X=k)\cdot(1-p_i)\\ &+\mathbb{P}_{i-1}(X=k-1)\cdot p_i\end{aligned}$$

Fehler	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_1[X=i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2[X=i]$	72%	26%	2%			
$\mathbb{P}_3[X=i]$	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
$\mathbb{P}_4[X=i]$	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
$\mathbb{P}_5[X=i]$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

b) *Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?*

$$\mathbb{E}[X] = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i \quad (3.31)$$
$$\mathrm{Var}[X] = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i \cdot (1 - p_i) \quad (3.32)$$
$$\mathrm{sd}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} \quad (3.7)$$

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1{,}5$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (1 - p_i) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \;\ldots$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}95$$

Standardabweichung: $\mathrm{sd}[X] = \sqrt{0{,}95} = 0{,}975$

Näherungen für ZV

Aufgabe 3.7: Annäherung Binomialverteilung

Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binomialverteilung mit derselben Anzahl von Realisierungen und demselben Erwartungswert.

$n = 5$, $\mathbb{E}[X] = 1{,}5$ und $\mathrm{Var}[X] = 0{,}95$

a) *Wie groß sind die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und die Varianz der Binomialverteilung.*

b) *Berechnung der Verteilung und Vergleich mit der Originalverteilung.*

---

n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
X	Zufallsvariable.

$n = 5$, $\mathbb{E}[X] = 1{,}5$ und $\mathrm{Var}[X] = 0{,}95$

a) *Wie groß sind die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und die Varianz der Binomialverteilung.*

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \tag{3.34}$$
$$\mathrm{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1 - p) \tag{3.35}$$

$$p = \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$
$$\mathrm{Var}[X_{\mathrm{Bin}}] = 5 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3) = 1{,}05$$

Die Varianz der Originalzählverteilung war $0{,}95$ und somit kleiner.

X_{Bin}	Binomialverteilte Zufallsvariable mit demselben Erwartungs- max. Zählwert.
$\mathbb{E}[\ldots]$	Erwartungswert von ...
$\mathrm{Var}[\ldots]$	Varianz von ...

$n = 5$, $\mathbb{E}[X] = 1{,}5$ und $\mathrm{Var}[X] = 0{,}95$

b) *Berechnung der Verteilung und Vergleich mit der Originalverteilung.*

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \tag{3.33}$$

$$\mathbb{P}(X_{\mathrm{Bin}} = k) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{n-k}$$

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X_{\mathrm{Bin}} = k]$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%
$\mathbb{P}[X = k]^*$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

*	Zählverteilung der Aufgabe zuvor.
$\mathbb{P}[..=x_i]$	Verteilung der diskreten Zufallsvariablen … .
p	Eintrittswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 3.8: Anzahl der Fehlfunktionen

Schätzen sie für $\#DS = 10^4$ und eine MF-Rate von $\zeta = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$

a) *die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen?*

b) *die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2 und mehr als 2 Fehlfunktionen auftreten?*

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen (Number of delivered services).
ζ	Fehlfunktionsrate.

Schätzen sie für $\#DS = 10^4$ und eine MF-Rate von $\zeta = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$

a) *die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen?*

$$\mathbb{P}\left[X = k\right] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{3.43}$$

Eine kleine zu erwartende Anzahl von vielen möglichen Fehlfunktionen ist näherungsweise poisson-verteilt mit dem Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta = 10^4\ [\mathrm{DS}] \cdot 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] = 0{,}1\ \ [\mathrm{MF}]$$

X	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Fehlfunktionen.
k	Wert der Zufallsvariablen X.
λ	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
$[\mathrm{DS}]$	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
$[\mathrm{MF}]$	Zählwert in Fehlfunktionen.

Schätzen sie für $\#DS = 10^4$ und eine MF-Rate von $\zeta = 10^{-5}\ \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$

b) *die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2 und mehr als 2 Fehlfunktionen auftreten?*

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0{,}1\\
\mathbb{P}\left[X=0\right] &= \mathrm{e}^{-0{,}1} = 90{,}48\%\\
\mathbb{P}\left[X=1\right] &= \mathrm{e}^{-0{,}1}\cdot 0{,}1 = 9{,}05\%\\
\mathbb{P}\left[X=2\right] &= \mathrm{e}^{-0{,}1}\cdot \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}45\%\\
\mathbb{P}\left[X>2\right] &= 1-\mathbb{P}\left[k=0\right]-\mathbb{P}\left[k=1\right]-\mathbb{P}\left[k=2\right]\\
&= 1-90{,}48\%-9{,}05\%-0{,}45\% = 0,015\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.9: Maskierungsanzahl

Bei der Überwachung von Service-Leistungen wird im Mittel von tausend Fehlfunktion (MF) eine nicht erkannt:

$$p_{\mathrm{M}} = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

a) *von 1000 MF keine und mehr als eine unerkannt bleibt?*

b) *von 5000 MF weniger als 3 und mehr als 8 unerkannt bleiben?*

---

p_{M}	Maskierungswahrscheinlichkeit.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$[\mathrm{MF}]$	Zählwert in Fehlfunktionen.

$$p_{\mathrm{M}} = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

a) *von 1000 MF keine und mehr als eine unerkannt bleibt?*

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad (3.43)$$

Für wenige von tausenden zu erwartenden Maskierungen ist die Anzahl der Maskierungen näherungsweise poisson-verteilt, Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \lambda &= \#MF \cdot p_{\mathrm{M}} \\ &= 10^3 \ [\mathrm{MF}] \cdot 10^{-3} = 1 \ [\mathrm{MMF}] \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathrm{e}^{-1} = 36{,}8\%$$

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathrm{e}^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 26{,}4\%$$

X	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Maskierungen.
k	Wert der Zufallsvariablen X.
λ	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
$[\mathrm{MMF}]$	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.

$$p_{\mathrm{M}} = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

b) *von 5000 MF weniger als 3 und mehr als 8 unerkannt bleiben?*

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{3.43}$$

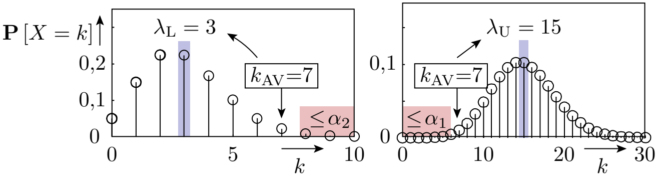
$$\begin{aligned}
\lambda &= \#MF \cdot p_{\mathrm{M}} \\
&= 5 \cdot 10^3 \text{ [MF]} \cdot 10^{-3} = 5 \text{ [MMF]} \\
\mathbb{P}[X < 2] &= \mathrm{e}^{-5} = \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!}\right) = 12{,}5\% \\
\mathbb{P}[X > 8] &= 1 - \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}\right) \\
&= 6{,}81\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.10: Bereichsschätzung MF-Rate

Für 10^6 Service-Leistungen wurden 5 Fehlfunktionen gezählt. In welchen Bereich liegt die zu erwartende Fehlerfunktionsrate ζ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

$\#DS = 10^6$, $k_{\mathrm{AV}} = 5$ [MF], $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$

Minimaler und maximaler Erwartungswert siehe Folie 3.59:



$$\sum_{k=0}^{k_{\mathrm{AV}}} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{L}}^k}{k!} \geq 1-\alpha_2 \qquad \sum_{k=0}^{k_{\mathrm{AV}}-1} \mathrm{e}^{-\lambda_{\mathrm{U}}} \cdot \frac{\lambda_{\mathrm{U}}^k}{k!} \leq \alpha_1$$

k_{AV}	Ist-Zählwert (Actual count value).
α_1, α_2	Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.
λ_{L}, λ_{U}	Minimaler bzw. maximaler Erwartungswert für einen poisson-verteilten Ist-Wert.

$\#DS = 10^6$, $k_{\mathrm{AV}} = 5$ [MF], $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$

Poisson-verteilte Maskierungsanzahl mit Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta$$

$\alpha_1 = \alpha_2$	$k_{\mathrm{AV}} = 4$	$k_{\mathrm{AV}} = 5$	$k_{\mathrm{AV}} = 6$
0,5%	[1,08, 11,0]	[1,54, 12,6]	[2,04, 14,2]
1%	[1,28, 10,0]	[1,79, 11,6]	[2,33, 13,1]
2%	[1,53, 9,08]	[2,09, 10,6]	[2,68, 12,0]
10%	[2,43, 6,68]	[3,15, 7,99]	[3,89, 9,28]
20%	[3,09, 5,51]	[3,90, 6,73]	[4,73, 7,91]

Aus der Tabelle Folie 3.59 ist für $k_{\mathrm{AV}} = 5$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ der Bereich $\lambda_{\mathrm{L}} = 1{,}79$ und $\lambda_{\mathrm{U}} = 11{,}6$ ablesbar. MF-Rate:

$$1{,}79 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right] \leq \zeta \leq 11{,}6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$$

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen (Number of delivered services).
ζ	Fehlfunktionsrate.
$\left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Aufgabe 3.11: Werkstück mit normalverteilter Masse

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10\,$g.

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X größer als 1,03 kg ist?*

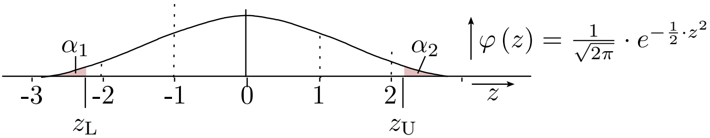
b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?*

c) *In welchem Bereich liegt die Masse mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

μ, σ	Erwartungswert, Standardabweichung.
α_1, α_2	Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.
X	Normalverteilte Zufallsvariable.
x_{L}, x_{U}	Untere und oberen Schranke des wahrscheinlichen Bereichs von X.

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10\,$g.

Lösungsansatz:



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{3.51}$$

$$\alpha_1 = \Phi(z_L) \tag{3.52}$$

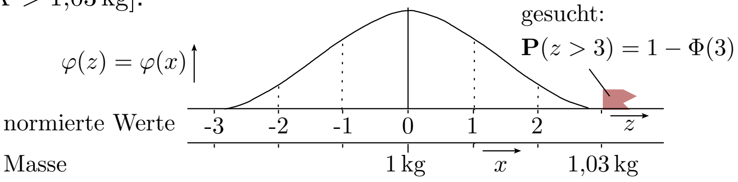
$$\alpha_2 = 1 - \Phi(z_U) \tag{3.53}$$

Z	Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$.
x, z	Werte der Zufallsvariablen X und Z.
$\varphi(z)$	Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung.
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
z_L, z_U	Transformierte unteren und obere Schranke.

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10$ g.

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X größer als 1,03 kg ist?*

$\mathbb{P}\left[X > 1{,}03\,\mathrm{kg}\right]$:



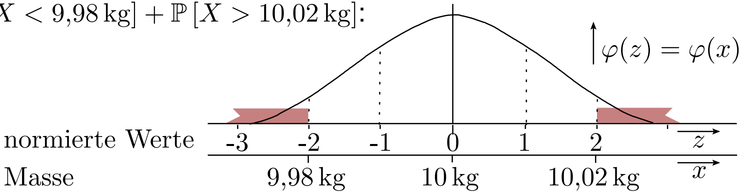
z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$$z_{\mathrm{U}} = \frac{1{,}03\,\mathrm{kg} - 1\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{g}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1 - \Phi\left(3\right) = 0{,}13\%$$

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10$ g.

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?*

$\mathbb{P}\left[X < 9{,}98\,\mathrm{kg}\right] + \mathbb{P}\left[X > 10{,}02\,\mathrm{kg}\right]$:



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$z_{\mathrm{L}} = -2 \quad z_{\mathrm{U}} = 2, \qquad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot (1 - \Phi(2)) = 4{,}56\%$

Die Masse X eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10\,$g.

c) *In welchem Bereich liegt die Masse mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

$$x_{\mathrm{L}} = \mu - \sigma \cdot z_{\mathrm{L}} = \mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \alpha_1\right) \tag{3.54}$$

$$x_{\mathrm{U}} = \mu + \sigma \cdot z_{\mathrm{U}} = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \alpha_2\right) \tag{3.55}$$

$\alpha_{1/2}$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\mp\Phi^{-1}\left(1-\alpha_{1/2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\mathrm{L}} = 1\,\mathrm{kg} - 10\,\mathrm{g} \cdot 2{,}33 = 0{,}97\,\mathrm{kg}$$

$$x_{\mathrm{U}} = 1\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{g} \cdot 2{,}33 = 1{,}023\,\mathrm{kg}$$

Aufgabe 3.12: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) *Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.*

b) *Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?*

$\#v$	Größe der Datenstichprobe.
v_i	Wert i der Datenstichprobe.
$\hat{\mu}$	Geschätzter Erwartungswert des Zählwerts.
$\hat{\sigma}^2$	Geschätzte Varianz des Zählwerts.

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) *Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i \tag{3.15}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} \left(v_i - \hat{\mu}\right)^2 \tag{3.16}$$

Erwartungswert:

$$\hat{\mu} \quad = \quad \frac{58+49+40+54+67+35+34+57+47+66}{10} = 50{,}7$$

Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(58-50{,}7)^2 + (49-50{,}7)^2 + (40-50{,}7)^2 + \ldots}{9} = 140$$

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis v_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

b) *Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?*

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} \tag{3.67}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} = \frac{140{,}01}{50{,}7} = 2{,}76$$

Die Varianz ist so hoch, als ob in der Modellfehler immer etwa drei Fehler identisch nachweisbar wären.

$\hat{\kappa}$ Geschätzte Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten.

Aufgabe 3.13: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von 1000 Fehlfunktionen 178 nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0{,}5\%$. Geringe Maskierungabhängigkeiten $(\kappa = 1{,}5)$.

$\#MF = n = 1000$ [MF], $x_{\mathrm{AV}} = 178$ [MMF], $\alpha = 1\%$, $\kappa = 1{,}5$

Auf welchen symmetrischen Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit lässt das schließen?

$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
x_{AV}	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MMF]	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.
α	Gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit, das Wert außerhalb des geschätzten Bereichs.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$.

$\#MF = n = 1000$ [MF], $x_{\mathrm{AV}} = 178$ [MMF], $\alpha = 1\%$, $\kappa = 1{,}5$

Auf welchen symmetrischen Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit lässt das schließen?

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\kappa \cdot \left(\frac{1}{x_{\mathrm{AV}}} - \frac{1}{n}\right)} \quad \text{für } \hat{p} \leq 50\% \tag{3.62}$$

$$\mathrm{sr}\left(p\right) = \frac{x_{\mathrm{AV}}}{n} \cdot \left(1 \mp \varepsilon_{\mathrm{r}}\right) \quad \text{für } \hat{p} \leq 50\% \tag{3.63}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2{,}57 \cdot \sqrt{1{,}5 \cdot \left(\frac{1}{178} - \frac{1}{1000}\right)} = 22{,}9\%$$

$$\mathrm{sr}\left(p_{\mathrm{M}}\right) = \frac{178}{1000} \cdot \left(1 \mp 22{,}9\%\right)$$

Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit: $13{,}7\%$ bis $21{,}9\%$.

$\Phi^{-1}(..)$ Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.
ε_{r} Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
$\mathrm{sr}\left(p_{\mathrm{M}}\right)$ Symmetrischer Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 3.14: Erforderliche Zählwertgröße

Zur Abschätzung der Fehlfunktionsrate ζ wurden für 10^6 Service-Anforderungen 441 Fehlfunktionen gezählt. Keine Abhängigkeiten $(\kappa = 1)$.

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

a) *Bereich der MF-Rate, wenn ein relativer Intervallradius von* $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$ *des Schätzwerts zugelassen ist?*

b) *Irrtumswahrscheinlichkeit* α*, dass die MF-Rate mehr als* $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$ *des Schätzwerts von diesem abweicht?*

ζ	Fehlfunktionsrate.
$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen (Number of delivered services).
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[DS]	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
x_{AV}	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$.
ε_{r}	Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

c) *Wie viele Fehlfunktionen müssen mindestens beobachtbar sein, um die Irrtumswahrscheinlichkeit für die* $\mp 10\%$ *Bereichszugehörigkeit auf* $\alpha \leq 2\%$ *abzusenken?*

d) *Auf und um welchen Wert muss die Anzahl ausprobierten Service-Leistungen erhöht werden, um das Ziel in Aufgabenteil c (* $\alpha \leq 2\%$ *für* $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$*) zu erreichen?*

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

a) *Bereich der MF-Rate, wenn ein relativer Intervallradius von* $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$ *des Schätzwerts zugelassen ist?*

$$\zeta = \left.\frac{\#MF}{\#DS}\right|_{\mathrm{ACR}} \quad (1.7)$$

$$\mathrm{sr}\left(p\right) = \frac{x_{\mathrm{AV}}}{n} \cdot \left(1 \mp \varepsilon_{\mathrm{r}}\right) \quad \text{für } \hat{p} \leq 50\% \quad (3.63)$$

Bereich der MF-Rate:

$$\begin{aligned}\mathrm{sr}\left(\zeta\right) &= \frac{\#MF}{\#DS} \cdot \left(1 \mp \varepsilon_{\mathrm{r}}\right) \quad \text{für } \hat{\zeta} \leq 50\% \\ &= \frac{441\ [\mathrm{MF}]}{10^6\ [\mathrm{DS}]} \cdot \left(1 \mp 10\%\right) = \left(4{,}0 \ldots 4{,}8\right) \cdot 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{DS}}\right]\end{aligned}$$

ACR bezieht sich immer auf einen zulässigen Intervallradius und eine zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit. Im Beispiel sind die Zälwerte $\#DS \geq 10^6$ und $\#MF \geq 441$ bei $\kappa = 1$ ausreichend für eine Schätzgenauigkeit $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$ und eine noch zu bestimmende Irrtumswahrscheinlichkeit.

ACR	Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.
$\mathrm{sr}\left(\zeta\right)$	Symmetrischer Bereich der geschätzten Fehlfunktionsrate.

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

b) *Irrtumswahrscheinlichkeit α, dass die MF-Rate mehr als $\varepsilon_{\mathrm{r}} \leq 10\%$ des Schätzwerts von diesem abweicht?*

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\mathrm{AV}}}} \quad \text{für } \hat{p} \ll 50\% \tag{3.62}$$

Intervallradius für $\hat{p} = \hat{\zeta} \ll 50\%$ für $\kappa = 1$ umgestellt nach der Irrtumswahrscheinlichkeit α:

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\#MF}}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \sqrt{\#MF}\right)\right) \\ &= 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(10\% \cdot \sqrt{441}\right)\right) \\ &= 2 \cdot (1 - \Phi(2{,}1)) = 3{,}6\%\end{aligned}$$

z	...,0	...,1
1,...	0,8413	0,8643
2,...	0,9772	0,9821
3,...	0,9987	0,9990

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\mathrm{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

c) *Wie viele Fehlfunktionen müssen mindestens beobachtbar sein, um die Irrtumswahrscheinlichkeit für die $\mp 10\%$ Bereichszugehörigkeit auf $\alpha \leq 2\%$ abzusenken?*

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\mathrm{AV}}}} \quad \text{für } \hat{p} \ll 50\% \tag{3.62}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Umgestellung nach dem (erforderlichen) Istzählwert $x_{\mathrm{AV}} = \#MF$:

$$x_{\mathrm{AV}} = \#MF \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2{,}33}{0{,}1}\right)^2 = 543$$

$\#DS = n = 10^6$ [DS], $\#MF = x_{\text{AV}} = 441$ [MF], $\kappa = 1$

d) *Auf und um welchen Wert muss die Anzahl ausprobierten Service-Leistungen erhöht werden, um das Ziel in Aufgabenteil c (* $\alpha \leq 2\%$ *für* $\varepsilon_{\text{r}} \leq 10\%$*) zu erreichen?*

$$\zeta = \left.\frac{\#MF}{\#DS}\right|_{\text{ACR}} \tag{1.7}$$

Proportionale Erhöhung der Anzahl der erbrachten Service-Leistungen zum Zählwert der Fehlfunktionen:

$$\hat{\zeta} = \frac{x_{\text{AV}}(\alpha{=}3{,}58\%)}{\#DS(\alpha{=}3{,}58\%)} = \frac{x_{\text{AV}}(\alpha{=}2\%)}{\#DS(\alpha{=}2\%)}$$

$$\#DS\,(\alpha = 2\%) = \#DS\,(\alpha = 3{,}58\%) \cdot \frac{x_{\text{AV}}(\alpha{=}2\%)}{x_{\text{AV}}(\alpha{=}3{,}58\%)}$$

$$= 10^6 \text{ [DS]} \cdot \frac{543 \text{ [MF]}}{441 \text{ [MF]}} = 1{,}23 \cdot 10^6 \text{ [DS]}$$

Die Anzahl der erbrachten Service-Leistungen $\#DS$ ist um $2{,}31 \cdot 10^5$ auf $1{,}23 \cdot 10^6$ zu erhöhen.

Aufgabe 3.15: Mindestmodellfehleranzahl

Eine Fehlersimulation soll eine Modellfehlerüberdeckung von $99\% \mp 0{,}2\%$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 2\%$ nachweisen. Nachweisabhängigkeiten zwischen den Modellfehlern sind für den Überschlag zu vernachlässigen.

$$\hat{p} = F\hat{C}_{\mathrm{M}} = 99\% \gg 50\%,\ \varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}} = \frac{0{,}2\%}{1-99\%} = 20\%,\ \alpha \leq 2\%,\ \kappa = 1,\ .$$

a) *Wie groß muss die Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mindesten sein?*

b) *Wie groß muss die Anzahl der unabhängig von einander nachweisbaren Modellfehler mindestens sein?*

$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$F\hat{C}_{\mathrm{M}}$	Schätzwert der Modellfehlerüberdeckung.
$\varepsilon_{\tilde{\mathrm{p}}}$	Intervallradius realtiv zum erwarteten Nichteintritts-Zählwerts.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$.

$\hat{p} = F\hat{C}_{\mathrm{M}} = 99\% \gg 50\%$, $\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}} = \frac{0{,}2\%}{1-99\%} = 20\%$, $\alpha \le 2\%$, $\kappa = 1$, .

a) *Wie groß muss die Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mindesten sein?*

$$\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{n - x_{\mathrm{AV}}}} \quad \text{für } \hat{p} \gg 50\% \tag{3.62}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned} \#NDF_{\mathrm{M}} &= n - x_{\mathrm{AV}} \\ &\ge \left(\frac{\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2{,}33}{0{,}2}\right)^2 = 136\,[\mathrm{F}] \end{aligned}$$

$\#NDF_{\mathrm{M}}$	Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.
n	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
x_{AV}	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
$\Phi^{-1}(..)$	Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

$\hat{p} = F\hat{C}_{\mathrm{M}} = 99\% \gg 50\%$, $\varepsilon_{\tilde{\mathrm{r}}} = \frac{0{,}2\%}{1-99\%} = 20\%$, $\alpha \leq 2\%$, $\kappa = 1$, .

b) *Wie groß muss die Anzahl der unabhängig von einander nachweisbaren Modellfehler mindestens sein?*

$$FC = \frac{\#DF}{\#F}\Big|_{\mathrm{ACR}} \tag{1.52}$$

$$FC_{\mathrm{M}} = 1 - \frac{\#NDF_{\mathrm{M}}}{\#F_{\mathrm{M}}}$$

$$\#F_{\mathrm{M}} = \frac{\#NDF_{\mathrm{M}}}{1 - FC_{\mathrm{M}}} = \frac{136\,[\mathrm{F}]}{1 - 99\%} = 13.600\,[\mathrm{F}]$$

Eine Abschätzung $FC_{\mathrm{M}} \in 99\% \mp 0{,}2\%$ mit $\alpha \leq 2\%$ verlangt 13.600 unabhängig voneinander nachweisbare Modellfehler, für $\kappa > 1$ κ-mal so viele.

$\#F_{\mathrm{M}}$	Anzahl der Modellfehler.
$[\mathrm{F}]$	Zählwert in Modellfehlern.

Aufgabe 3.16: Leistungsabhängiges Gehalt

Beim Programmieren entstehen etwa 10 bis 100 Fehler je 1000 NLOC. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit von der Fehlerentstehungsrate ξ gezahlt werden. Dazu soll der zu erwartende Bereich von ξ mit einer relativen Genauigkeit von 25% bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 4\%$ geschätzt werden. Zusatzannahme: normalverteilte Fehleranzahl mit $\kappa = 1$.

$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right] \ll 50\%$, $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 25\%$, $\alpha = 4\%$, $\kappa = 1$.

Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$\hat{\xi}$	Zu schätztende Fehlergenerierungsrate in Fehler je NLOC.
$\left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right]$	Zählwertverhältnis in entstandene Fehler je Netto-Codezeile.
ε_{r}	Intervallradius realtiv zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.
κ	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$.

$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[\frac{\text{F}}{\text{NLOC}}\right] \ll 50\%$, $\varepsilon_{\text{r}} = 25\%$, $\alpha = 4\%$, $\kappa = 1$.

Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

$$\varepsilon_{\text{r}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\text{AV}}}} \quad \text{für } \hat{p} \ll 50\% \tag{3.62}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Mindestanzahl Fehler $\#F_{\text{C}} = x_{\text{AV}}$, die für einen ausreichend genaue Evaluierung unabhängig voneinander entstehen müssen:

$$\#F_{\text{C}} = \left(\frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\varepsilon_{\text{r}}}\right)^2 \geq \left(\frac{2{,}05}{0{,}25}\right)^2 = 67{,}2$$

$\#F_{\text{C}}$ Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.

$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{NLOC}}\right] \ll 50\%$, $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 25\%$, $\alpha = 4\%$, $\kappa = 1$.

Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

$$\xi = \left.\frac{\#F_{\mathrm{C}}}{C}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{1.90}$$

Die Anzahl der zu überprüfenden NLOC je Programmierer:

$$C \geq \frac{67{,}2}{\xi}$$

ξ	10^{-3}	10^{-2}
C	67.200 NLOC	6.720 NLOC

Bei einer typ. Programmierleistung von 100 bis 500 NLOC pro Tag müssen die Programmierfehler über Monate gezählt werden.

C Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
ACR Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

Mischverteilung

Aufgabe 3.17: Verteilung von Widerstandswerten

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde gemischt:

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 20 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 0,99 kΩ und Standardabweichung 10 Ω.

$\#R_1 = 500$: $\mu_{\mathrm{R1}} = 1{,}02\,\mathrm{k\Omega}$, $\sigma_{\mathrm{R1}} = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $\#R_2 = 300$: $\mu_{\mathrm{R2}} = 0{,}99\,\mathrm{k\Omega}$, $\sigma_{\mathrm{R2}} = 10\,\mathrm{k\Omega}$

a) *Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste? Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung* $\Phi(z)$.

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Widerstand einen Wert* $R \leq 9{,}8\,\mathrm{k\Omega}$?

$\#R_i$	Anzahl der Widerstände mit Erwartungswert $\mu_{\mathrm{R}i}$ und Standardabweichung $\sigma_{\mathrm{R}i}$.
$\Phi(z)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

$\#R_1 = 500$: $\mu_{\mathrm{R1}} = 1{,}02\,\mathrm{k}\Omega$, $\sigma_{\mathrm{R1}} = 20\,\mathrm{k}\Omega$, $\#R_2 = 300$: $\mu_{\mathrm{R2}} = 0{,}99\,\mathrm{k}\Omega$, $\sigma_{\mathrm{R2}} = 10\,\mathrm{k}\Omega$

a) *Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste? Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x] = \sum_{j=1}^{\#Y} h_j \cdot F_{X_j}(x) \quad (3.69)$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (3.51)$$

$$F_X(R) = \sum_{i=1}^{\#i} h_i \cdot \Phi\left(\frac{R-\mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$F_X(R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1{,}02\,\mathrm{k}\Omega}{20\,\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0{,}99\,\mathrm{k}\Omega}{10\,\Omega}\right)$$

X	Zufallsvariable mit Mischverteilungsfunktion $F_X(x)$.
X_j	Zu mischende Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_{X_J}(x)$.
Y	Zufallsvariable für die Auswahl der gemischten Objekte.
$\#Y$	Anzahl der Objekttypen mit unterschiedlicher Verteilungsfunktion.
h_j	Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt mit Verteilungsfunktion j ausgewählt wird.

$\#R_1 = 500$: $\mu_{\mathrm{R1}} = 1{,}02\,\mathrm{k}\Omega$, $\sigma_{\mathrm{R1}} = 20\,\mathrm{k}\Omega$, $\#R_2 = 300$: $\mu_{\mathrm{R2}} = 0{,}99\,\mathrm{k}\Omega$, $\sigma_{\mathrm{R2}} = 10\,\mathrm{k}\Omega$

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Widerstand einen Wert $R \leq 9{,}8\,\mathrm{k}\Omega$?*

$$\mathbb{P}\left[R \leq 9{,}9\,\mathrm{k}\Omega\right] = \frac{5}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0{,}98\mathrm{k}\Omega - 1,02\,\mathrm{k}\Omega}{20\,\Omega}\right) + \frac{3}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0{,}98\,\mathrm{k}\Omega - 0{,}99\,\mathrm{k}\Omega}{10\,\Omega}\right)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \Phi\left(-2\right) + \frac{3}{8} \cdot \Phi\left(-1\right) = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{\left(1 - \Phi\left(2\right)\right)}_{0{,}0228} + \frac{3}{8} \cdot \underbrace{\left(1 - \Phi\left(1\right)\right)}_{0{,}1587}$$

$$= 8{,}23\%$$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Aufgabe 3.18: Tschebyscheffsche Ungleichung

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

C_i: 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF], $\alpha = 2\%$

a) *Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?*

b) *Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?*

c) *Kapazitätsbereich nach der tschebyscheffsche Ungleichung?*

C_i	Stichprobe von Kapazitätswerten.
[nF]	Wert in nF, Masseinheit der Kapazität.
α	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.

C_i: 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 $[\mathrm{nF}]$, $\alpha = 2\%$

a) *Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?*

$$\hat{\mu} = \tfrac{1}{\#v} \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{\#v} v_i \tag{3.15}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \tfrac{1}{\#v-1} \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2 \tag{3.16}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \tag{3.17}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10} \cdot (1{,}20 + 1{,}23 + 1{,}18 + 1{,}25 + 1{,}21 + 1{,}19 + 1{,}23 + 1{,}22 + 1{,}09 + 1{,}17) = 1{,}17$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(1{,}20 - 1{,}179)^2 + (1{,}23 - 1{,}179)^2 + \ldots}{9}} = 0{,}045$$

$\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$	Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung.
$\#v$	Größe der Datenstichprobe.
v_i	Wert i der Datenstichprobe.

C_i: 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF], $\alpha = 2\%$

b) *Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?*

$$\mathrm{sr}\,(x) = \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right) \tag{3.57}$$

Geschätzter Erwartungswert und geschätzte Standardabweichung der Kapazität aus Aufgabenteil a: $\mu = 1{,}17$ [nF], $\sigma = 0{,}045$ [nF]

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}\mathrm{sr}\,(C) &\in \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\\ &= 1{,}17 \mp 0{,}0450 \cdot 2{,}33\\ &= [1{,}065,\ 1{,}275]\end{aligned}$$

$\mathrm{sr}\,(C)$ Symmetrischer Bereich der Kapazitätswerte.
$\Phi(z)$ Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

C_i: 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 $[\mathrm{nF}]$, $\alpha = 2\%$

c) *Kapazitätsbereich nach der tschebyscheffsche Ungleichung?*

$$\mathrm{sr}\left[x\right] = \mu \mp \tfrac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} \tag{3.76}$$

Schätzwerte aus Aufgabenteil a: $\mu = 1{,}17\ [\mathrm{nF}]$, $\sigma = 0{,}045\ [\mathrm{nF}]$

$$\begin{aligned}\mathrm{sr}\left(C\right) &\in \mu \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}\\ &= 1{,}17 \mp \frac{0{,}0540}{\sqrt{2\%}}\\ &= \left[0{,}861,\ 1{,}497\right]\end{aligned}$$

Wenn bekannt ist, dass die Kapazitätswerte normalverteilt sich, beträgt der Bereich, in dem 98% der Werte liegen, nur 1,065 bis 1,275.

Pareto-Verteilung

Aufgabe 3.19: Verteilung von Schadenskosten

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000$ Eur seien so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) *Welchen Formfaktor K hat die Pareto-Verteilung?*

b) *Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?*

$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
U	Der Anteil der Ursachen mit der größten Wirkung.
W	Anteil an der Gesamtwirkung.
$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000$ Eur seien so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) *Welchen Formfaktor K hat die Pareto-Verteilung?*

$$W = U^{\frac{K-1}{K}} \tag{3.83}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{K-1}{K} &= 1 - \frac{1}{K} = \frac{\ln(W)}{\ln(U)} \\ K &= \left(1 - \frac{\ln(W)}{\ln(U)}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\ln(90\%)}{\ln(15\%)}\right)^{-1} = 1{,}0588 \end{aligned}}$$

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000$ Eur seien so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

b) *Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?*

$$U = \left(\frac{x_{\min}}{w_{\min}}\right)^K \tag{3.82}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_{\min} &= x_{\min} \cdot U^{-\frac{1}{K}} \\ &= 10.000\,\mathrm{Eur} \cdot 15\%^{-\frac{1}{1{,}0588}} = 60.000\,\mathrm{Eur} \end{aligned}}$$

$w_{\min}$ Mindestwirkung des Anteils der Ursachen mit der größten Wirkung.

Aufgabe 3.20: Verteilung der Nachweislänge

Zur Abschätzung des Formparameter K einer parato-verteilten Nachweislänge wurden für einen Zufallstestsatz für 24 Modellfehler folgende Nachweislängen bestimmt:

10, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 33, 37, 40, 52, 67, 70, 83, 110, 185, 217, 290, 420, 850, 1730.

a) *Darstellung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler* $\#F_{\mathrm{ND}}$ *als Funktion der Testanzahl* N*, doppelt logarithmisch für* $N = 10$ *bis 1000. Annäherung durch eine Ausgleichsgerade.*

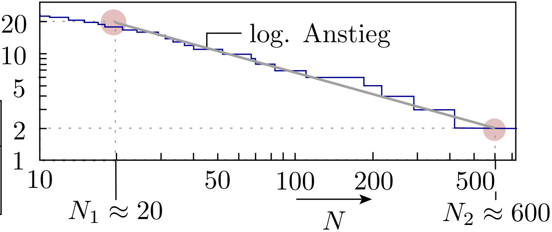
b) *Bestimmen Sie aus zwei Punkten der Ausgleichsgeraden den Formfaktor* K *der Pareto-Verteilung der Nachweislänge.*

$F_X(N)$	Verteilungfunktion der Nachweislänge.
$\mu_{\mathrm{FC}}(N)$	Zu erwartende Fehlerüberdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.
N	Anzahl der Tests.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.

10, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 33, 37, 40, 52, 67, 70, 83, 110, 185, 217, 290, 420, 850, 1730.

a) *Darstellung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler* $\#F_{\mathrm{ND}}$ *als Funktion der Testanzahl* N, *doppelt logarithmisch für* $N = 10$ *bis 1000. Annäherung durch eine Ausgleichsgerade.*

i	N_i	$\#F_{\mathrm{ND}.i}$
1	20	20
2	600	2



N_i Testanzahl mit einer bekannter Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.
$\#F_{\mathrm{ND}.i}$ Anzahl der Modellfehler, die mit Testsatzlänge N_i nicht nachweisbar sind.

b) *Bestimmen Sie aus zwei Punkten der Ausgleichsgeraden den Formfaktor K der Pareto-Verteilung der Nachweislänge.*

$$F_X(N) = \mu_{\text{FC}}(N) = 1 - \left(\frac{N_0}{N}\right)^K \quad \text{für } N \geq N_0 \tag{3.84}$$

$$FC = \left.\frac{\#DF}{\#F}\right|_{\text{ACR}} \tag{1.52}$$

$$\#F_{\text{ND}}(N) \sim 1 - \mu_{\text{FC}}(N) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-K}$$

$$\frac{\#F_{\text{ND.1}}}{\#F_{\text{ND.2}}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{-K}$$

$$K = \frac{\ln\left(\frac{\#F_{\text{ND.1}}}{\#F_{\text{ND.2}}}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} = \frac{\ln(10)}{\ln(30)} = 0{,}68$$

i	N_i	$\#F_{\text{ND}.i}$
1	20	20
2	600	2

$F_X(N)$ Verteilungfunktion der Nachweislänge.
$\mu_{\text{FC}}(N)$ Zu erwartende Fehlerüberdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.
N_0 Testanzahl, für die vorher alle Fehler beseitigt wurden, also für $FC = 0$.
N Anzahl der Tests, für die erkannten Fehler beseitigt werden, incl. N_0.
$\#DF$ Anzahl der erkennbaren Fehler (Number of detectable faults).

Gamma- und Exponentialvert.

Aufgabe 3.21: Modell von Musa, Goel und Okumoto

Das am häufigsten zitierte Zuverlässigkeitswachstumsmodell ist das von Musa, Goel und Okumoto (MGO-Modell*). Es unterstellt für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht beseitigten Fehler und der Nachweiszeit t eine abklingende e-Funktion:

$$\mu_{\mathrm{F}}(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

a) *Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit T unterstellt?*

b) *Was für eine Dichtefunktion wird für die MF-Rate unterstellt?*

μ_{F}	zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
a, b	Experimentell abzuschätzende Modellparameter.
t	Testzeit.
T	Nachweiszeit, Zufallsvariable.
*	Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement, 2003.

$$\mu_{\mathrm{F}}(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

a) *Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit T unterstellt?*

Die Verteilung der Nachweiszeit T als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler spätestens nach einer Testdauer t nachgewiesen wird, ist die zu erwartende Fehlerüberdeckung:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mu_{\mathrm{FC}}(t)$$

Mit

$$\mu_{\mathrm{FC}}(t) = 1 - \frac{\mu_{\mathrm{F}}(t)}{\mu_{\mathrm{F}}(t=0)} = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$
$$F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$

Für die Nachweiszeit unterstellt das MGO-Modell statt einer Pareto-Verteilung eine Exponentialverteilung mit $\lambda = b$.

λ Parameter der Exponentialverteilung.

$$\mu_{\mathrm{F}}(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

b) *Was für eine Dichtefunktion wird für die MF-Rate unterstellt?*

$$\mu_{\mathrm{FC}}(N) = 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-\zeta \cdot (N - N_0)} \cdot h(\zeta) \cdot \mathrm{d}\zeta \tag{3.95}$$

Mit

$$\mu_{\mathrm{FC}}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-bt}$$

aus Aufgabenteil a und $N - N_0 = \frac{t}{MTS}$:

$$1 - \mu_{\mathrm{FC}}(t) = \mathrm{e}^{-bt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{\zeta \cdot t}{MTS}} \cdot h(\zeta) \cdot \mathrm{d}\zeta$$

Anschauliche Lösung:

$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \zeta = b \cdot MTS \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das MGO-Modell unterstellt für alle Fehler dieselbe Fehlfunktionsrate.

MTS Mittlere Service-Dauer (Mean time to service).

Aufgabe 3.22: Fehleranzahl und Zuverlässigkeit

Ein Testobjekt hat nach Beseitigung aller mit $N_1 = 10^2$ Tests erkennbaren Fehler abschätzungsweise noch 100 Fehler. Pareto-verteilte Nachweislänge mit Formfaktor $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \ldots\ 0{,}7\}$.

$N_1 = 100$, $\mu_{\mathrm{F}}(N_1) = 100$, $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \ldots\ 0{,}7\}$.

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

b) *Wie groß ist die zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

N	Anzahl der Tests.
$\mu_{\mathrm{F}}(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.

$N_1 = 100$, $\mu_F(N_1) = 100$, $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \dots\ 0{,}7\}$.

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

$$\mu_F(N_2) = \mu_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

$$\mu_F(N_2) = \mu_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 10^{-K}$$

$$\mu_F(N_3) = \mu_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 100^{-K}$$

	$K = 0{,}3$	$K = 0{,}4$	$K = 0{,}5$	$K = 0{,}6$	$K = 0{,}7$
$\mu_F(N_2)$	50,1	39,8	31,6	25,1	20,0
$\mu_F(N_3)$	25,1	15,8	10,0	6,3	4,0

$N_1 = 100$, $\mu_F(N_1) = 100$, $K \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \dots\ 0{,}7\}$.

b) *Wie groß ist die zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach $N_2 = 10^3$ und $N_3 = 10^4$ Tests?*

$$R_F(N) = \frac{N}{K \cdot \mu_F(N)} \tag{1.65}$$

$$R_F(N_2) = \frac{N_2}{K \cdot \mu_F(N_2)} = \frac{1.000}{K \cdot 100 \cdot 10^{-K}} = \frac{10 \cdot 10^K}{K} = \frac{10^{1+K}}{K}$$

$$R_F(N_3) = \frac{N_3}{K \cdot \mu_F(N_3)} = \frac{10.000}{K \cdot 100 \cdot 100^{-K}} = \frac{100 \cdot 100^K}{K} = \frac{100^{1+K}}{K}$$

	$K = 0{,}3$	$K = 0{,}4$	$K = 0{,}5$	$K = 0{,}6$	$K = 0{,}7$
$R_F(N_2)$	66,5	62,8	63,2	66,4	71,6
$R_F(N_3)$	1330	1580	2000	2640	3590

$R_F(N)$ Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit N Tests nachweisbaren Fehlern.

Aufgabe 3.23: Fehleranzahl und MF-Rate

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert N_1 auf $N_2 = 2 \cdot N_1$ hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

a) *Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber N_1 ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler pareto-verteilt ist, erforderlich, um die MF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?*

b) *Um welchen Faktor verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der Testsatzverlängerung aus Aufgabenteil a?*

N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.
ζ_F	Fehlfunktionsrate durch Fehler.

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert N_1 auf $N_2 = 2 \cdot N_1$ hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

a) *Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber N_1 ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler pareto-verteilt ist, erforderlich, um die MF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?*

$$K = \log\left(\frac{\zeta_\mathrm{F}(N_1)}{\zeta_\mathrm{F}(N_2)}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right) - 1 \qquad (1.64)$$

$$\zeta_\mathrm{F}(N_2) = \zeta_\mathrm{F}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-(K+1)} \qquad (1.61)$$

Formfaktor der Verteilung der MF-Rate bzw. der Nachweislänge:

$$K = -\frac{\log(1/3)}{\log(2)} - 1 = 0{,}585$$

Erforderliche Vergrößerung der effektiven Testanzahl:

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{\zeta_\mathrm{F}(N_2)}{\zeta_\mathrm{F}(N_1)}\right)^{-\frac{1}{K+1}} = 100^{\frac{1}{1{,}585}} = 18{,}3$$

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert N_1 auf $N_2 = 2 \cdot N_1$ hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

b) *Um welchen Faktor verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der Testsatzverlängerung aus Aufgabenteil a?*

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

$$\boxed{\frac{\mu_{\mathrm{F}}(N_2)}{\mu_{\mathrm{F}}(N_1)} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 18{,}3^{-0{,}585} = 18{,}27\%\cdot}$$

$\mu_{\mathrm{F}}(N)$ Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.

Ausfälle

Aufgabe 3.24: Ausfallrate und mittlere Lebensdauer

Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit je einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit je einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit je einer Ausfallrate von 0,5 fit?

fit Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.

Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit je einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit je einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit je einer Ausfallrate von 0,5 fit?

$$\lambda_{\mathrm{Sys}} = \sum_{i=1}^{\#C} \lambda_i \qquad (3.100)$$

$$\mu_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\lambda} \qquad (3.99)$$

Die Ausfallraten addieren sich. Gesamtausfallrate:

$$\lambda_{\mathrm{Sys}} = 30 \cdot 150\,\mathrm{fit} + 100 \cdot 30\,\mathrm{fit} + 500 \cdot 0{,}5\,\mathrm{fit} = 7750\,\mathrm{fit}$$

Zu erwartende Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$\mu_{\mathrm{L.Sys}} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{Sys}}} = \frac{1}{7750 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{h}^{-1}} = 129 \cdot 10^3\,\mathrm{h} = 14{,}7\,\mathrm{Jahre}$$

λ_{Sys}	Ausfallrate des Systems.
$\#C$	Anzahl der für das Funktionieren erforderlichen Bausteine.
λ_i	Ausfallrate Komponente i.
μ_{L}	Zu erwartende Lebensdauer.

Aufgabe 3.25: Verteilung der Lebensdauer

Bei einem redundanten System aus dem aktivem System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten haben alle vier Komponenten eine exponentialverteilte Lebensdauer L_{K} mit derselben Ausfallrate λ_{K}.

Aktive $+4\times$ kalte Reserve mit $L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, Lösungshinweise: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$ und (Gl. 3.90).

a) *Was für eine Verteilung hat die Lebensdauer L_{Sys} des Gesamtsystems?*

b) *Welche Dichtefunktionen haben die Lebensdauern der Komponenten und die Lebensdauer des Gesamtsystems?*

c) *Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Lebensdauer des Gesamtsystems?*

L_{K}	Lebensdauer einer einzelnen Komponente, Zufallsvariable.
λ_{K}	Ausfallrate einer einzelnen Komponente.
$L\mathrm{Sys}$	Lebensdauer des Gesamtsystem, Zufallsvariable.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	Exponentialverteilung, λ – Verteilungsparameter.
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma-Verteilung, α – Formparameter, β – Skalenparameter.

Aktive $+4\times$ kalte Reserve mit $L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, Lösungshinweise: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$ und (Gl. 3.90).

a) *Was für eine Verteilung hat die Lebensdauer L_{Sys} des Gesamtsystems?*

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{G}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) \tag{3.90}$$

Eine Exponentionverteilung mit dem Verteilungsparameter λ ist eine Gamma-Verteilung mit Formfaktor $\alpha = 1$ und Skalenparameter $\beta = \lambda$:

$$L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$$

Ein System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten hat die viefache Lebensdauer. Bei gleichen Skalenparametern addieren sich die Formfaktoren:

$$L_{\mathrm{Sys}} = 4 \cdot L_{\mathrm{K}} \sim \mathcal{G}(4, \lambda)$$

Aktive $+4\times$ kalte Reserve mit $L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, Lösungshinweise: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}\left(1, \lambda\right)$ und (Gl. 3.90).

b) *Welche Dichtefunktionen haben die Lebensdauern der Komponenten und die Lebensdauer des Gesamtsystems?*

$$f_X\left(x\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \qquad (3.91)$$

$$f_X\left(x\right) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \mathrm{e}^{-\beta \cdot x} \cdot x^{\alpha - 1} \qquad (3.85)$$

$$\Gamma\left(\alpha + 1\right) = \alpha \cdot \Gamma\left(\alpha\right) \quad \text{mit} \;\; \Gamma\left(1\right) = 1 \qquad (3.87)$$

Exponentialverteilte Dichte der Lebensdauern der Komponenten:

$$f_{\mathrm{LK}}\left(t\right) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

Gamma-verteilte Dichte der Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$f_{\mathrm{LSys}}\left(t\right) = \frac{\lambda^4}{\Gamma(4)} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3 = \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3$$

$\Gamma\left(\ldots\right)$	Gamma-Funktion.
t	Lebensdauer.

Aktive $+4\times$ kalte Reserve mit $L_{\mathrm{K}} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, Lösungshinweise: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$ und (Gl. 3.90).

c) *Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Lebensdauer des Gesamtsystems?*

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \tag{3.88}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{3.89}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{3.7}$$

$$\mu_{\mathrm{LSys}} = \frac{4}{\lambda}$$

$$\sigma^2_{\mathrm{LSys}} = \frac{4}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{\mathrm{LSys}} = \frac{2}{\lambda}$$

Die Lebensdauer des Gesamtsystems hat den vierfachen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung der der Komponenten.

μ, σ Erwartungswert, Standardabweichung.

Aufgabe 3.26: Ausfallrate von Glühlampen

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

a) *Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?*

b) *Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?*

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

a) *Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?*

Mittlere Ausfallrate an den ersten 18 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{400\,\text{Ausfälle}}{10.000\,\text{Objekte}\cdot 18\,\text{Tage}\cdot 24\,\frac{\text{h}}{\text{Tag}}}$$
$$= 9{,}26\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 92.600\,\text{fit}$$

λ	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

b) *Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?*

Ausfallrate am 19 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{5\,\text{Ausfälle}}{9.600\,\text{Objekte} \cdot 24\,\text{h}} = 2{,}17 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 21.700\,\text{fit}$$

Das ist eine signifikate Abnahme, die darauf schließen lässt, dass sich die Glühlampen noch in der Frühphase befinden, in der die Ausfallrate mit der Nutzungsdauer abnimmt.

Aufgabe 3.27: Dauerbetrieb oder Ausschalten

Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate $\lambda = 9000$ fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\mathrm{FSO}} = 10^{-5}$ ausfällt.

Ab welcher Ausschaltdauer t_{off} erhöht Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?

λ	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in 10^9 Stunden.
p_{FSO}	Ausfallwahrscheinlichkeit beim Einschalten.
t_{off}	Ausschaltdauer.

Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate $\lambda = 9000$ fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\mathrm{FSO}} = 10^{-5}$ ausfällt.

Ab welcher Ausschaltdauer t_{off} erhöht Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?

$$V(t) = \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \tag{3.97}$$

Die gesuchte Ausschaltdauer t_{off} ist die Zeit, ab der die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im normalen Betrieb größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit p_{FSO} beim Einschalten ist:

$$\begin{aligned} 1 - V(t_{\mathrm{off}}) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t_{\mathrm{off}}} < p_{\mathrm{FSO}} \\ t_{\mathrm{off}} &> -\frac{\ln(1 - p_{\mathrm{FSO}})}{\lambda} = -\frac{\ln(1 - 0{,}01\%)}{9000 \cdot 10^{-9}\mathrm{h}^{-1}} \approx 11\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

$V(t_{\mathrm{off}})$ Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn das System für t_{off} eingeschaltetet bleibt.

Aufgabe 3.28: Voralterung

a) *Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?*

b) *Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre?*

c) *Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?*

a) *Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?*

Voralterung erhöht die Ausfallrate auch für die potentiellen Schwachstellen, die Frühausfälle verursachen. Die kränklichen Bauteile sterben und werden vor dem Einsatz ersetzt. Unter normalen Betriebsbedingungen ist die Ausfallrate vorgealterter Bauteile geringer und die mittlere Lebensdauer höher.

b) *Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre?*

Der übertaktete Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung ist eine Voralterung. Es überleben die Systeme ohne Kinderkrankheiten. Die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre ist unter Normalbedingungen (ohne Übertaktung) geringer.

c) *Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?*

In der Hauptnutzungsphase erhöht sich während des übertakteten Betriebs mit erhöhter Betriebsspannung die Ausfallrate und ist ohne Übertaktung wieder normal. Die Ermüdungsphase, in der die Ausfallrate zunimmt, wird aber eher erreicht. Wenn ein Zeitintervall nach der Übertaktung und vor Beginn der Ermüdungsphase betrachtet wird, erhöht die Übertaktung die zu erwartende Lebensdauer der am Anfang des Betrachtungszeitraums noch lebenden Systeme.

Tests und Kontrollen

Test

Aufgabe 4.1: Inspektionsfehlerüberdeckung

Inspektionsergebnisse für ein Programm aus 1000 NLOC und :

- Inspekteur 1: 85 gefundene Fehler in 5 h
- Inspekteur 2: 76 gefundene Fehler in 4 h
- Schnittmenge: 56 übereinstimmende gefundene Fehler.

$C = 1000\,\mathrm{NLOC}$, $\#F_1 = 85$, $\#F_2 = 76$, $\#\left(F_1 \cap F_2\right) = 56$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 5\,\mathrm{h}$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 4\,\mathrm{h}$, daraus ableitbar $\#\left(F_1 \cup F_2\right) = 85 + 76 - 56 = 105$

a) *Effizienz und Effektivität beider Inspekteure?*

b) *Gesamtanzahl und Anzahl der nicht gefundenen Fehler?*

c) *Inspektionsfehlerüberdeckung?*

C	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
$\#F_1, \#F_2$	Anzahl der von Inspektor 1 bzw. Inspektor 2 gefundenen Fehler.
$\#(F_1 \cap F_2)$	Anzahl von beiden Inspekteuren gefundenen Fehler.
t_{Insp}	Inspektionsdauer in Mitarbeiterstunden.
$\#(F_1 \cup F_2)$	Gesamtanzahl der gefundenen Fehler (von beiden Inspekteuren insgesamt).

$C = 1000\,\mathrm{NLOC}$, $\#F_1 = 85$, $\#F_2 = 76$, $\#\left(F_1 \cap F_2\right) = 56$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 5\,\mathrm{h}$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 4\,\mathrm{h}$, daraus ableitbar $\#\left(F_1 \cup F_2\right) = 85 + 76 - 56 = 105$

a) *Effizienz und Effektivität beider Inspekteure?*

Effizienz (gefundene Fehler je Mitarbeiterstunde):

$$EFC_1 = \frac{85\,\mathrm{Fehler}}{5\,\mathrm{h}} = 17\,\frac{\mathrm{Fehler}}{\mathrm{h}}$$
$$EFC_2 = \frac{76\,\mathrm{Fehler}}{4\,\mathrm{h}} = 19\,\frac{\mathrm{Fehler}}{\mathrm{h}}$$

Efffektivität (Gefundene Fehler je 1000 NLOC):

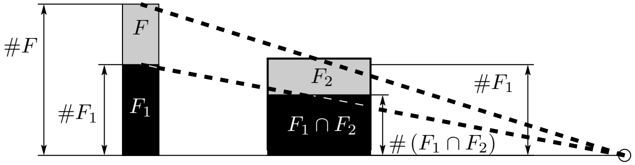
$$EFT_1 = \frac{85\,\mathrm{Fehler}}{1.000\,\mathrm{NLOC}}$$
$$EFT_2 = \frac{76\,\mathrm{Fehler}}{1.000\,\mathrm{NLOC}}$$

EFC	Effizienz, gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde.
EFT	Effektivität, gefundenen Fehler je 1000 NLOC.
μ_{F}	Zu erwartende Gesamtfehleranzahl.
μ_{NDF}	Zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

$C = 1000\,\mathrm{NLOC}$, $\#F_1 = 85$, $\#F_2 = 76$, $\#\left(F_1 \cap F_2\right) = 56$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 5\,\mathrm{h}$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 4\,\mathrm{h}$, daraus ableitbar $\#\left(F_1 \cup F_2\right) = 85 + 76 - 56 = 105$

b) *Gesamtanzahl und Anzahl der nicht gefundenen Fehler?*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{F}} = \left.\frac{\#F_1 \cdot \#F_2}{\#(F_1 \cap F_2)}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{4.1}$$



$$\#\mu_{\mathrm{F}} = \frac{85 \cdot 76}{56} = 115{,}4$$

Zu erwartende Anzahl der nicht gefundenen Fehler:

$$\#\mu_{\mathrm{NDF}} = \#\mu_{\mathrm{F}} - \#\left(M_1 \cup M_2\right) = 115{,}4 - 105 = 10{,}4$$

$C = 1000\,\mathrm{NLOC}$, $\#F_1 = 85$, $\#F_2 = 76$, $\#(F_1 \cap F_2) = 56$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 5\,\mathrm{h}$, $t_{\mathrm{Insp.1}} = 4\,\mathrm{h}$, daraus ableitbar $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

c) *Inspektionsfehlerüberdeckung?*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{FC}} = \left.\frac{\#(F_1 \cap F_2) \cdot \#(F_1 \cup F_2)}{\#F_1 \cdot \#F_2}\right|_{\mathrm{ACR}} \tag{4.2}$$

$$\mu_{\mathrm{FC}} = \frac{56 \cdot 105}{85 \cdot 76} = \frac{105}{115{,}4} = 91\%$$

Kontrolle:

$$\mu_{\mathrm{FC}} = 1 - \frac{\#\mu_{\mathrm{NDF}}}{\#\mu_{\mathrm{F}}} = 1 - \frac{10{,}4}{115{,}4} = 91\% \checkmark$$

Anmerkung: Ein Zählwert 10 erlaubt Bereichsvorhersagen Größenordnung $5 \ldots 15$ mit $\alpha = 10\%$. Die Zahlenwerte 10,4 und die 115,4 sind aber keine Zählwerte, sondern sind aus drei Zählwerten abgeleitet. ... Grob geschätzt vielleicht $\mu_{\mathrm{FC}} = 85\% \ldots 97\%$ mit $\alpha = 20\%$.

μ_{FC} Zu erwartende Inspektionsfehlerüberdeckung.

Aufgabe 4.2: Inspektion als Zufallstest

Die Anzahl der Inspekteure X, die für den Nachweis eines Fehlers erforderlich sind, sei pareto-verteilt

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \begin{cases} 0 & x \leq x_{\min} \\ 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^K & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.78)$$

$K = 0{,}5$. Erwartete Fehlerüberdeckung mit einem Inspekteur 60%. Der erste Inspekteur findet 100 Fehler. Inspektionsdauer je Inspekteur eine Mitarbeiterstunde.

a) *Zusammenhang zwischen der Inspektionsfehlerüberdeckung und der Anzahl der Inspekteure?*

b) *Erforderliche Anzahl der Inspekteure x für eine zu erwartenden Fehlerüberdeckung von 95%?*

c) *Zu erwartende Anzahl der von Inspekteur 2 bis 10 gefundenen Fehler und zu erwartende Effizienz der Inspekteure 1 bis 8?*

$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.
$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
x	Anzahl der Inspekteure.

a) *Zusammenhang zwischen der Inspektionsfehlerüberdeckung und der Anzahl der Inspekteure?*

Verteilungsfunktion als die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fehler nachweisbar ist, ist gleich der zu erwartenden Fehlerüberdeckung:

$$\mu_{\mathrm{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0{,}5}$$

Bestimmung von $x_{\min}$:

$$\mu_{\mathrm{FC}}(1) = 60\% = 1 - (x_{\min})^{0{,}5}$$

$$x_{\min} = 40\%^2 = 0{,}16$$

$\mu_{\mathrm{FC}}(x)$ Zu erwartende Fehlerüberdeckung in Abhängigkeit von der Anzahl der Inspekteure.

b) *Erforderliche Anzahl der Inspekteure x für eine zu erwartenden Fehlerüberdeckung von 95%?*

Umstellung von

$$\mu_{\mathrm{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{0{,}16}{x}\right)^{0{,}5}$$

nach der Anzahl der Inspekteure:

$$x = \frac{0,16}{\left(1 - \mu_{\mathrm{FC}}(x)\right)^2} = \frac{0,16}{\left(1 - 95\%\right)^2} = 64$$

Der erste Inspekteur findet 100 Fehler. Inspektionsdauer je Inspekteur eine Mitarbeiterstunde.

c) *Zu erwartende Anzahl der von Inspekteur 2 bis 10 gefundenen Fehler und zu erwartende Effizienz der Inspekteure 1 bis 8?*

$$\mu_{\mathrm{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0{,}5}$$

Erwartete Gesamtfehleranzahl:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{\mu_{\mathrm{DF}}(1)}{1-\mu_{\mathrm{FC}}(1)} = \frac{100\,\mathrm{F}}{40\%} = 250\,\mathrm{F}$$

Zu erwartende Anzahl der je Inspekteur gefundenen Fehler:

$$\mu_{\mathrm{DF}}(x) = \mu_{\mathrm{F}} \cdot (1-\mu_{\mathrm{FC}}(x)) = 250\,\mathrm{F} \cdot \left(\frac{0{,}16}{x}\right)^{0{,}5}$$

μ_{F}	Zu erwartende Gesamtfehleranzahl.
$[\mathrm{F}]$	Zählwert in Fehlern.
$\mu_{\mathrm{DF}}(x)$	Erwartete Anzahl der nachweisbaren Fehler als Funktion von der Anzahl der Inspekteure.

Effizienz (Gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde):

$$EFC\left(x\right)=\left(\mu_{\mathrm{DF}}\left(x\right)-\mu_{\mathrm{DF}}\left(x-1\right)\right)/1\,\mathrm{h}$$

Insp.	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_{\mathrm{DF}}\left(x\right)$	100	70,7	57,7	50	44,7	40,8	37,8	35,4
$EFC\left(x\right)$	100	29,3	13,0	7,7	5,3	3,9	3,0	2,4

$\mu_{\mathrm{EFC}}\left(x\right)$ Zu erwartende Effizienz als Funktion von der Anzahl der Inspekteure.

Aufgabe 4.3: Funktionstest

a) *Vorteile der digitalen gegenüber der analogen Verarbeitung?*

b) *Typische Verarbeitungskette mit physikalischen Ein- und Ausgaben?*

c) *Was bedeutet »Hardware in the Loop« und welche wesentlichen Vorzüge bietet das?*

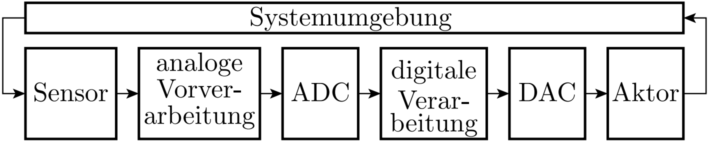
d) *Was bedeutet Prüfgerechter Entwurf?*

a) *Vorteile der digitalen gegenüber der analogen Verarbeitung?*

- Fehlertoleranz gegen Störungen, Fertigungsstreuungen, ...
- geringere Fertigungskosten und Entwurfskosten, kleiner, schneller, genauer zuverlässiger.
- Zusätzlicher funktionaler Gestaltungsspielraum:
  - Datenspeicherung,
  - sequentielle und SW-gesteuerte Abarbeitung,
  - ...

(siehe Folie 4.38 *Vorteile digitaler Verarbeitung*)

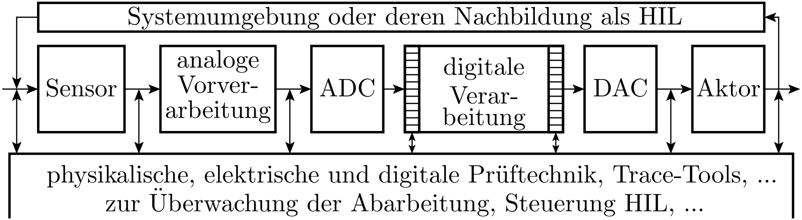
b) *Typische Verarbeitungskette mit physikalischen Ein- und Ausgaben?*



- Sensor, analoge Vorverarbeitung, analog-digital-Wandlung,
- digitale Verarbeitung
  - in der Regel mit Rechnern, durch Software,
  - die Hardware stellt für die SW die Grundfunktionen, zeitkritische Funktionen, ... bereit.
  - Zwischen der HW und der Anwendungs-SW liegt in der Regel noch Schichten: Hardware-Abstraktion, Betriebssystem, ...
- digital-analog-Wandlung,
- analoge Nachbearbeitung, Aktor.

c) *Was bedeutet »Hardware in the Loop« und welche wesentlichen Vorzüge bietet das?*

Nachbildung der Systemumgebung durch eine Attrappe oder Simulation:



Mehr und frühere Testmöglichkeiten, insbesondere

- auch die Reaktion in gefählichen Situation,
- besseren Einblick in die Interaktion mit physikalischen Prozessen, ...

d) *Was bedeutet Prüfgerechter Entwurf?*

Schaffung der Voraussetzungen, dass sich ein System mit vernünftigen Aufwand ausreichend gründlich testen lässt.

Aufgabe 4.4: Test digitaler Schaltungen

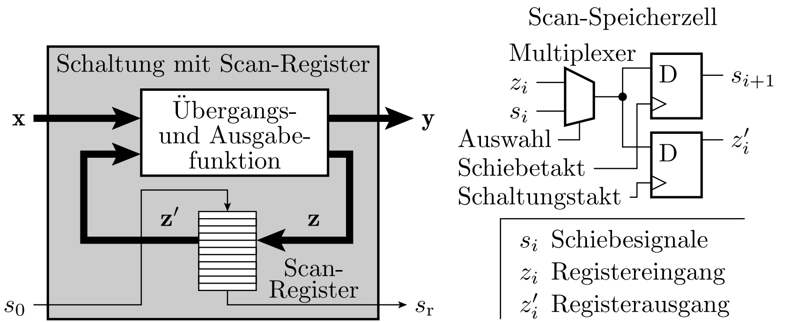
a) *Was sind Scan-Register und was für ein Problem lösen sie?*

b) *Was ist Boundary-Scan und welche Tests unterstützt er?*

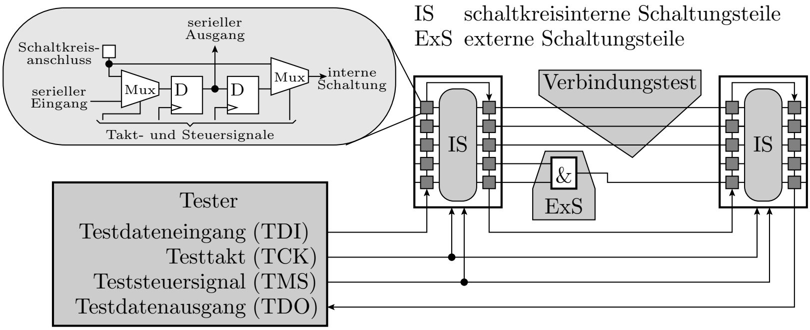
c) *Warum ist für Baugruppen, die in Kraftfahrzeugen eingesetzt werden, eine optische Inspektion erforderlich?*

a) *Was sind Scan-Register und was für ein Problem lösen sie?*

Umschaltmöglichkeit interner Speicherelemente in ein seriell les- und beschreibbares Schieberegister, um Speicherzustände während des Tests lesen und schreiben zu können:



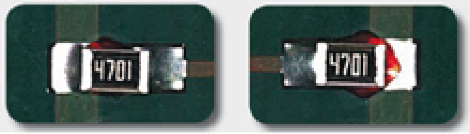
b) *Was ist Boundary-Scan und welche Tests unterstützt er?*



- Scan-Registern an den Anschlüssen digitaler Schaltkreise.
- Ermöglicht den isolierten Test der schaltkreisinternen Funktion und Schaltkreisumgebung auf Baugruppen.
- Unterstützt vor allem den Bestückungs- und Verbindungstest auf Baugruppen.

c) *Warum ist für Baugruppen, die in Kraftfahrzeugen eingesetzt werden, eine optische Inspektion erforderlich?*

Es gibt Bestückungsfehler, die sind optisch, aber nicht elektrisch erkennbar. Bild links korrekt bestückter SMD-Widerstand, rechts Lötfläche durch Kleber verschmutzt. Elektrisch leitende aber keine feste Lötverbindung:



Nachweis nur durch visuelle Kontrolle möglich. Nach Ausfall der Baugruppe z.B. durch Vibration in einem Fahrzeug ist sofort erkennbar, dass es sich um einen Fertigungsfehler handelt.

Wenn ein nach Fertigung nachweisbarer Fehler Schaden verursacht, z.B. einen Unfall, greift die Produkthaftung und der Hersteller muss für den entstandenen Schaden aufkommen.

Überwachung

Aufgabe 4.5: Arithmetischer Code

a) *Bilden Sie für den Bitvektor*

$$x = 110010001000011101_2$$

das fehlererkennende Codewort durch vorzeichenfrei Multiplikation mit der Primzahl $C = 10313$ (Produktbildung und Konvertierung in einen Binärvektor).

b) *Zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung der Kontrolle:*

```
if y%C then <MF-Behandlung>
```

(Divisionsrest ungleich null).

c) *Werden mit dem gewählten Code Verfälschung von y erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?*

C	Große ganzzahlige Konstante, bevorzugt eine Primzahl.
x	Zu verschlüsselndes Datenwort.
y	Verschüsseltes Datenwort.
$\%$	Divisionsrest.
μ_{MC}	Zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung.

a) *Bilden Sie für den Bitvektor*

$$x = 110010001000011101_2$$

das fehlererkennende Codewort durch vorzeichenfrei Multiplikation mit der Primzahl $C = 10313$.

Mit Octave (Matlab):

```
>> printf('y=0x%x\n',0x3221D*10313)
Ausgabe: y=0x7e394245
```

binär: 0b111.1110.0011.1001.0100.0010.0100.0101

b) *Zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung der Kontrolle:*

```
if y%C then <MF-Behandlung>
```

$$\mu_{\mathrm{MC}} = 1 - \frac{1}{C} \qquad (4.12)$$

$$\mu_{\mathrm{MC}} \approx 1 - \frac{1}{10313} = 99{,}990\%$$

c) *Werden mit dem gewählten Code Verfälschung von y erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?*

Division die Bildung des Divisionsrests sind lineare Operationen. Der Divisionsrest der Summe (Wert plus Verfälschung) ist die Summe der Divisionsreste. Verfälschung erkennbar, wenn nicht ohne Rest durch C teilbar. Divisionsrest für »3 und 14 invertiert«:

$$0\mathrm{b}100\,0000\,0000\,1000\,\%\,1031 = 16.392\,\%\,10313 = 6.097 \neq 0$$

Verfälschungen, die die Bits 3 und 14 invertieren, werden immer erkannt.

Aufgabe 4.6: Prüfsummen

Gegeben sind die korrekte und drei verfälschte Bytefolgen:

```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

a) *Bilden Sie die Prüfsummen durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge.*

b) *Bilden Sie die Prüfsummen durch durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.*

An welche der beiden Prüfsummen sind die drei vorgegebenen Datenverfälschungen erkennbar?

```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

a) *Bilden Sie die Prüfsummen durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge.*

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13		0x13		0x13		0x13	
0xF2		0x33		0xF2		0xF1	
0x33		0xF2		0x37		0x90	
0xE6		0xE6		0xE6		0x56	

```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13
0xF2	0x05	0x33	0x46	0xF2	0x05	0xF1	0x04
0x33	0x38	0xF2	0x38	0x37	0x3C	0x90	0x94
0xE6	0x1E	0xE6	0x1E	0xE6	0x22	0x56	0x0A

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytvertauschung von F1 nicht.

```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

b) *Bilden Sie die Prüfsummen durch durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.*

Wert	binär	Wert F1	binär	Wert F2	binär	Wert F3	binär
0x13 0xF2 0x33 0xE6		0x13 0x33 0xF2 0xE6		0x13 0xF2 0x37 0xE6		0x13 0xF1 0x90 0x56	
$\oplus$:							

$\oplus$ – bitweise Exor

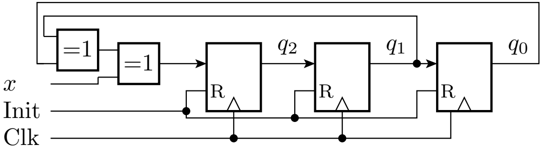
```
K:  0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

Wert	binär	Wert F1	binär	Wert F2	binär	Wert F3	binär
0x13 0xF2 0x33 0xE6	0001 0011 1111 0010 0011 0011 1110 0110	0x13 0x33 0xF2 0xE6	0001 0011 0011 0011 1111 0010 1110 0110	0x13 0xF2 0x37 0xE6	0001 0011 1111 0010 0011 0111 1110 0110	0x13 0xF1 0x90 0x56	0001 0011 1111 0001 1001 0000 0101 0110
$\oplus$:	0011 0100		00110100		0011 0000		0010 0100

$\oplus$ – bitweise Exor

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytvertauschung von F1 nicht.

Aufgabe 4.7: Prüfkennzeichen mit LFSR



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
…	…			

PKZ:

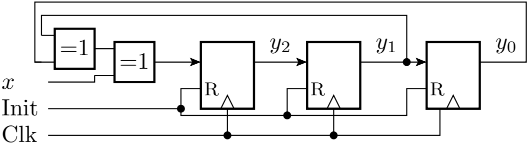
a) *Auf welches Prüfkennzeichen* $\mathbf{y} = y_2 y_1 y_0$ *wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet? Füllen Sie dazu die Tabelle in der Abbildung aus.*

b) *Wie groß ist die zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung* μ_{FC}*?*

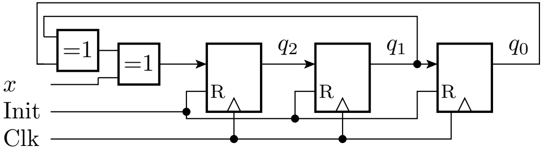
---

x_i	Originalbits vor der Umwandlung in einen fehlererkennenden Code.
g_i	Bitstellen des Generatorpolynoms zur Multiplikation mit der Originalbitfolge.
r	Bitanzahl des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
q_i	Registerbit i des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
Init	Initialisierungssignal.
Clk	Taktsignal (Clock signal).

a) *Auf welches Prüfkennzeichen* $\mathbf{y} = y_2y_1y_0$ *wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet?*



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	0	0	0
7	1	1	0	0
8	0	1	1	0
9	1	1	1	1
10	0	1	1	1
11	0	0	1	1
12	1	0	0	1
13	0	0	0	0
14	1	0	0	0
15	0	1	0	0
PKZ:		0	1	0



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
...	...			

PKZ:

b) *Wie groß ist die zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung μ_{FC}?*

$$\mu_{\mathrm{MC}} = 1 - 2^{-r} \tag{4.10}$$

$$\boxed{\mu_{\mathrm{FC}} = 1 - 2^{-3} = 87{,}5\%}$$

μ_{MC} Zu erwartende Fehlfunktionsüberdeckung.

Aufgabe 4.8: Kontrollautomat

Ein (vereinfachter) Rechnerbefehlssatz besteht aus vier verschiedenen Befehlstypen:

```
add␣rr,rr;
addi␣rr,imm8;
sub␣rr,rr;
subi␣rr,imm8;
```

␣ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ('r0', 'r1', ... 'r31'); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ('0x00', '0x01', ..., '0xFF'; '0x' gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit Zifferenwerten '0' bis 'F').

a) *Beschreiben Sie das Befehlsformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.?*

b) *Entwerfen Sie einen deterministischen Kontrollautomaten auf Syntaxfehler als Graph für einen Moore-Automaten.*

```
add␣rr,rr;
addi␣rr,imm8;
sub␣rr,rr;
subi␣rr,imm8;
```

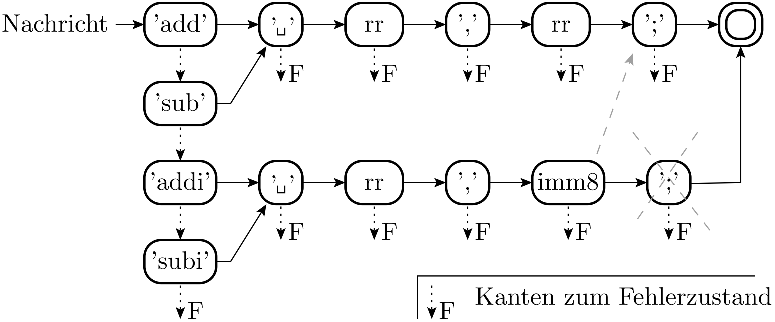
␣ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ('r0', 'r1', ... 'r31'); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ('0x00', '0x01', ..., '0xFF'; '0x' gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit Zifferenwerten '0' bis 'F').

a) *Beschreiben Sie das Befehlsformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.?*

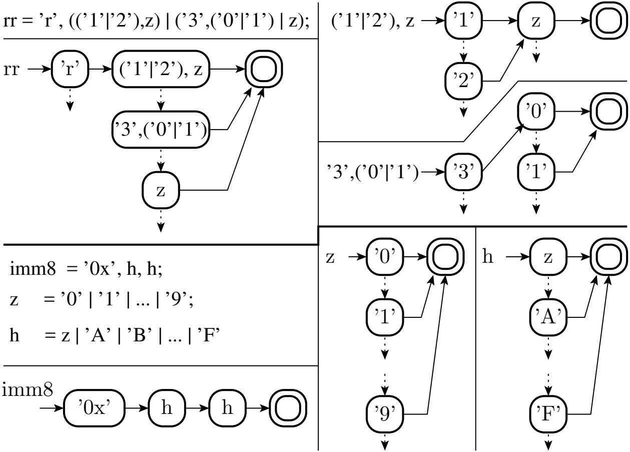
```
Befehl = (('add' | 'sub'), '␣', rr, ',', rr,   ';') |
         ('addi'| 'subi','␣', rr, ',', imm8, ';');
rr     = 'r', (('1'|'2'),z) | ('3',('0'|'1') | z);

imm8   = '0x', h, h; z      = '0' | '1' | ... | '9';
h      = z | 'A' | 'B' | ... | 'F';
```

```
Befehl = (('add' | 'sub'), '⊔', rr, ',', rr,   ';') |
         ('addi'| 'subi','⊔', rr, ',', imm8, ';');
rr     = 'r', (('1'|'2'),z) | ('3',('0'|'1') | z);
```

b) *Entwerfen Sie einen deterministischen Kontrollautomaten auf Syntaxfehler als Graph für einen Moore-Automaten.*



```
imm8    = '0x', h, h; z        = '0' | '1' | ... | '9';
h       = z | 'A' | 'B' | ... | 'F';
```

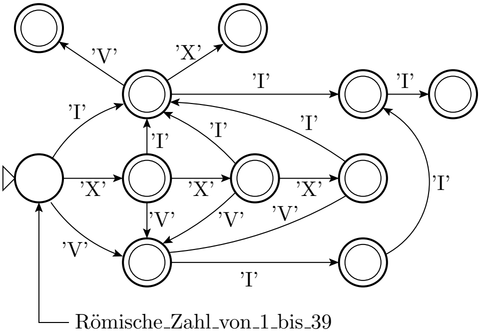


Aufgabe 4.9: Syntaxtest für römische Zahlen

Entwerfen Sie einen Mealy-Kontrollautomaten (Abräumen der Zeichen an den Kanten) für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39.

Wert		Wert		Wert		Wert	
1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX		

Entwerfen Sie einen Mealy-Kontrollautomaten (Abräumen der Zeichen an den Kanten) für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39.



I	XI	XXI	XXXI
II	XII	XXII	XXXII
III	XIII	XXII	XXXII
IV	XIV	XXIV	XXXIV
V	XV	XXV	XXXV
VI	XVI	XXVI	XXXVI
VII	XVII	XXVII	XXXVII
VIII	XVIII	XXVIII	XXXVIII
IX	XIX	XXIX	XXXIX
X	XX	XX	

◎ (potentieller) Endzustand

Bei allen Eingaben, für die keine Kante gezeichnet ist, Übergang in den Fehlerzustand.

Fehlertoleranz

Aufgabe 4.10: Kreuzparität

Längsparität

```
1011001001101000
1100001110010011
0110010010101101
1000100001100101
1101001011010011
1101000010011110
1010011000010101
1011010010100110
```

Querparität

a) *Ergänzen Sie Bitwerte für die Längs- und Querparität?*

b) *Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?*

a) *Ergänzen Sie Bitwerte für die Längs- und Querparität?*

Längsparität

```
1011001001101000 1
1100001110010011 0
0110010010101101 0
1000100001100101 0
1101001011010011 1
1101000010011110 0
1010011000010101 1
1011010010100110 0
1000110111001111
```

Querparität

b) *Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?*

Die Invertierung des rot unterlegten Bits ist an einem Paritätsfehler in Zeile 6 und in Spalte 7 zu erkennen.

Aufgabe 4.11: (8,12)-Hamming-Code

b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0

$$q_0 = x_0 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \qquad q_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7$$
$$q_1 = x_0 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \qquad q_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$$

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0
Kontrollbits												

a) *Bilden Sie die Codeworte für die darzustellenden Werte:* $w_1 = 0$*x73,* $w_2 = 0$*x1D und* $w_3 = 0$*xD6?*

b) *Bestimmen Sie für die Codeworten* $c_4 = 0$*xA24,* $c_5 = 0$*x5D6 und* $c_6 = 0$*x141, ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?*

a) *Bilden Sie die Codeworte für* $w_1 = 0x73$, $w_2 = 0x1D$ *und* $w_3 = 0xD6$?

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits													
$\mathbf{x}_1 = 0x73$													$\mathbf{b}_1$=0x
$\mathbf{x}_2 = 0x1D$													$\mathbf{b}_2$=0x
$\mathbf{x}_3 = 0xD6$													$\mathbf{b}_3$=0x

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits													
$\mathbf{x}_1$ = 0x73	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	$\mathbf{b}_1$= 0x79E
$\mathbf{x}_2$ = 0x1D	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	$\mathbf{b}_2$= 0x1E7
$\mathbf{x}_3$ = 0xD6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	$\mathbf{b}_3$= 0xDB9

b) $c_4 = 0$*xA24*, $c_5 = 0$*x5D6 und* $c_6 = 0$*x141, ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?*

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits													
$\mathbf{b}_4 = 0\text{xA24}$													$\Delta\mathbf{q}_4$:
$\mathbf{b}_5 = 0\text{x5D6}$													$\Delta\mathbf{q}_5$:
$\mathbf{b}_6 = 0\text{x141}$													$\Delta\mathbf{q}_6$:

b) $c_4 = 0$*xA24*, $c_5 = 0$*x5D6 und* $c_6 = 0$*x141, ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?*

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits													
$\mathbf{b}_4 = 0\text{xA24}$	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\Delta\mathbf{q}_4 = 3$
$\mathbf{b}_5 = 0\text{x5D6}$	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	$\Delta\mathbf{q}_5 = 9$
$\mathbf{b}_6 = 0\text{x141}$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	$\Delta\mathbf{q}_6 = 15$

verfälschtes Bit

x_4: 0b10100101 = 0xA5
x_5: 0b01010011 = 0x58
x_6: nicht korrigierbar

Hardware

Aufgabe 5.1: Vollständiger Test

Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

a) *Test mit allen Eingabewerten.*

b) *Test mit allen 3-Pattern-Tests mit einer 1-0-1 Folge an einem und konstanten Werten an den 39 anderen Eingabebits.*

c) *Test mit allen Eingabeänderungen.*

---

w Anzahl der Eingabebits.

t_{test} Testzeit, wenn jeder Einzeltest 100 ns dauert.

Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

a) *Test mit allen Eingabewerten.*

Mit $w = 40\,\mathrm{Bit}$ sind 2^{40} Eingabewerte darstellbar. Erforderliche Testzeit für das Ausprobieren aller Eingabne:

$$t_{\mathrm{test}} \geq 2^{40} \cdot 100\,\mathrm{ns} = 30{,}5\,\mathrm{h}$$

b) *Test mit allen 3-Pattern-Tests mit einer 1-0-1 Folge an einem und konstanten Werten an den 39 anderen Eingabebits.*

Für alle 40 Eingänge 2^{39} 3-Pattern-Tests:

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{test}} &\geq 3 \cdot w \cdot 2^{w-1} \cdot 100\,\mathrm{ns} \\ &= 3 \cdot 40 \cdot 2^{39} \cdot 100\,\mathrm{ns} = 76\,\mathrm{Tage} \end{aligned}$$

Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

c) *Test mit allen Eingabeänderungen.*

Anzahl der möglichen Eingabeänderungen:

$$2^w \cdot (2^w - 1)$$

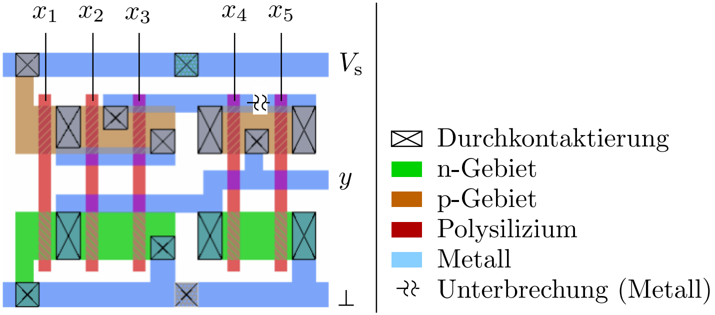
Bei geschickter Reihung ist die zweite Eingabe jedes Eingabepaars der erste Wert des Folgeeingabepaars:

$$\begin{aligned} t_{\text{test}} &\geq 2^w \cdot (2^w - 1) \cdot 100\,\text{ns} \\ &\approx 2^{80} \cdot 100\,\text{ns} \approx 38 \cdot 10^9\,\text{Jahre} \end{aligned}$$

Geschätzte Zeit seit dem Urknall $14 \cdot 10^9$ Jahre.

Aufgabe 5.2: Stuck-Open-Fehlerl

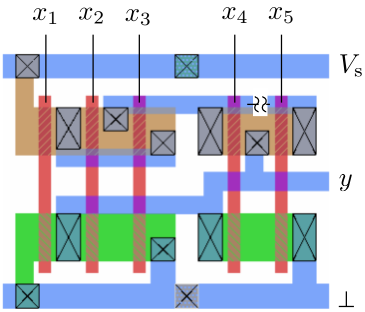
Gegeben ist ein Gatter-Layout mit einer unterbrochenen Metallverbindung zum Source des PMOS-Transistors am Eingang x_5:

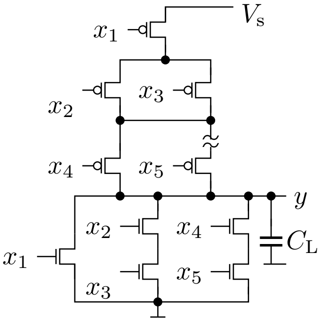


a) *Gatterschaltung mit eingezeichneter Unterbrechung?*

b) *2-Pattern-Test für den Fehlernachweis?*

a) *Gatterschaltung mit eingezeichneter Unterbrechung?*





Die Lastkapazität C_L speichert den logischen Wert, wenn der Ausgang y weder mit V_S (log. 1) noch mit $\perp$ (log. 0) verbunden ist.

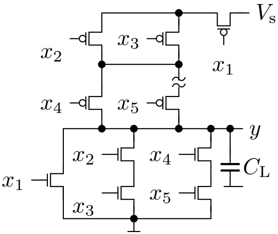
b) *2-Pattern-Test für den Fehlernachweis?*

Mit der Unterbrechung kann Ausgang y nicht über den PMOS-Transistor an x_5 aufgeladen werden. Das Anregungspattern muss die Lastkapazität C_{L} entladen. Bedingung:

$$x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_4 x_5$$

Das Nachweispattern muss C_{L} ohne Fehler über PMOS-Transistor an x_5 aufgeladen. Bedingung:

$$\bar{x}_1 \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5$$



	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
A	*	*	*	*	1
N	0	1	0	*	0

A Anregungs-Pattern

N Nachweis-Pattern