Test und Verlässlichkeit 2: Wahrscheinlichkeit

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV_F2.pdf)

5. Dezember 2023

Inhalt Foliensatz 2

Vorlesung	5	6	7
ca. ab Folie	2	25	65

Wahrscheinlichkeit

Definition, Abschätzung

Wahrscheinlichkeit

Wird ein Zufallsexperiment n-mal wiederholt, so strebt die relative Häufigkeit $\#A/n$, dass ein Ereignis A eintritt unter konstanten Versuchsbedingungen gegen die Eintrittswahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \frac{\#A}{n} \tag{1}$$

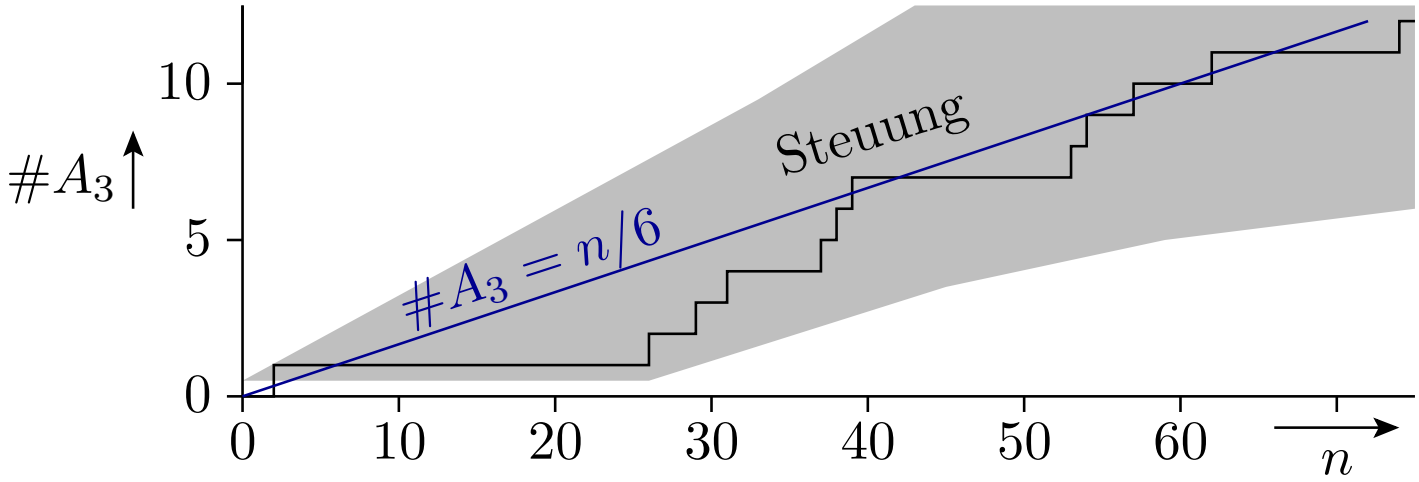
Kenngrößen der Verlässlichkeit, die gegen eine Wahrscheinlichkeit steben oder als Wahrscheinlichkeit definiert sind:

- Verfügbarkeit A und $PFD = 1 - A$,
- Anteil der erbrachten Service-Leistungen η_{DS}
- Fehlfunktionsrate ζ,
- Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen η_{SE},
- Fehlfunktionsüberdeckung MC, Diveritätsrate η_{Div},
- Fehlerüberdeckung FC, ...

$\mathbb{P}[A]$	Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignis A.
$\#A$	Anzahl, wie oft Ereignis A eingetreten ist.

Beispiel »Würfeln einer 3«

- Mögliche Ergebnisse: 1, 2, ..., 6, günstiges Ergebnis: 3
- Anzahl der Versuche: n



$$\mathbb{P}[A_3] = \lim_{n\to\infty} \frac{\#A_3}{n} = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist die beste Vorhersage für die zu erwartende relative Häufigkeit.

Verkettete Ereignisse

Verkettete Ereignisse

Beschreibung eines Zufallsexperiments durch Teilexperimente mit verknüpften Ergebnissen. Im nachfolgenden wird bei jedem Experiment zweimal gewürfelt (Ereignisse A und B, Wertebereich jeweils $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Daraus werden mit Vergleichsoperatoren die zweiwertigen Ereignisse C und D gebildet und diese einmal UND- und einmal ODER verknüpft und gezählt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	20	...	40
A	6	1	5	4	1	1	2	2	4	6	4	3	1		6		5
B	6	5	6	2	1	3	3	6	4	5	1	3	1		4		3
$C = (A > 3)$	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0		1		1
$D = (B < 3)$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1		0		0
$E = (C \wedge D)$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0		0		0
$F = (C \vee D)$	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1		1		1
$\#C$	1	1	2	3	3	3	3	3	4	5	6	6	6		11		21
$\#D$	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4		6		9
$\#E$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2		5		6
$\#F$	1	1	2	3	4	4	4	4	5	6	7	7	8		13		24

Ereignis	rel. Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
$C = (A > 3)$	$21/40 = 53\%$	$3/6 = 50\%$
$D = (B < 3)$	$9/40 = 23\%$	$2/6 = 33\%$
$E = (C \wedge D)$	$6/40 = 15\%$	$6/36 = 17\%$
$F = (C \vee D)$	$24/40 = 60\%$	$24/36 = 67\%$

Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwerte für $n \to \infty$ ergibt sich für jeden Versuch aus dem Verhältnis der Anzahl der günstigen zur Anzahl der möglichen Ergebnisse. Die Würfelexperimente haben 6 mögliche Ergebnisse. Davon sind für die Ereignisse C und D 3 bzw. 2 günstig. Die verketten Ereignisse E und F haben $6^2 = 36$ mögliche Ergebnisse, von denen 6 bzw. 24 günstig sind.

Eine relative Häufigkeit mit weniger als 100 Wiederholungen des Zufallsexperiments weicht im Mittel noch erheblich von der Eintrittswahrscheinlichkeit ab.

Mit der erforderlichen Anzahl der Zählversuche in Abhängigkeit von der geforderten Schätzgenauigkeit befassen wir uns später (siehe Abschn. 3.2.7 *Bereichsschätzung Zählwerte*).

Zusatzbedingungen

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit werden nur die Versuche und Ereignisse gezählt, die die Bedingung erfüllen*. Beispiel sei die ODER-Verknüpfung sich ausschließender Ereignisse:

$$E = C \vee D \text{ unter der Bedingung } C \wedge D = 0.$$

																				$\sum$	$\sum$
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	20	16
C	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	11	7
D	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	6	2
$C \vee D$	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	13	9

nicht mitgezählte Ereignisse bzw. Summe ohne diese Ereignisse

Sowohl die Anzahl der gezählten Versuche als auch die günstigen Ergebnisse verringern sich um die vier nicht mitzuzählenden Ergebnisse mit $C \wedge D = 1$.

Zusatzbedingungen können großen Einfluss auf die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments und deren Eintrittswahrsch. haben.

* Ob die nicht mitzuzählenden Ereignisse auftreten können, ist dafür unwichtig.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A unter der Bedingung B eintritt:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \wedge B]}{\mathbb{P}[B]} \tag{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B unter der Bedingung A eintritt:

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A \wedge B]}{\mathbb{P}[A]}$$

Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[A|B] \cdot \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} \tag{3}$$

$A,\ B$	Ereignisse.
$\mathbb{P}[A\|B]$	Wahrscheinlichkeit von Ereignis A unter der Bedingung B.
$\mathbb{P}[A \wedge B]$	Wahrscheinlichkeit von Ereignis A und B.
$\mathbb{P}[A \vee B]$	Wahrscheinlichkeit von Ereignis A oder B.

Beispiel 2.1: Fehlklassifizierung Corona-Test

Zufallsvariable A Person infiziert: $\mathbb{P}[A] = 10^{-4}$
Zufallsvariable B Test positiv: $\mathbb{P}[B] = 10^{-2}$
Wahrsch. Test positiv, wenn Person infiziert: $\mathbb{P}[B|A] = 99\%$
Mit welcher Wahrsch. Person infiziert, wenn der Test positiv ist?

$\mathbb{P}[A] = 10^{-4}$, $\mathbb{P}[B] = 10^{-2}$, $\mathbb{P}[B|A] = 99\%$, gesucht $\mathbb{P}[B|A]$

$\mathbb{P}[A] = 10^{-4}$, $\mathbb{P}[B] = 10^{-2}$, $\mathbb{P}[B|A] = 99\%$, gesucht $\mathbb{P}[B|A]$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$, dass eine Person infiziert, wenn der Test positiv ist:

$$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[B|A] \cdot \frac{\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = 99\% \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-2}} \approx 1\%$$

Wenn der Test anschlägt, dann ist das in 99% der Fälle ein Fehlalarm.

$\mathbb{P}[A] = 10^{-4}$, $\mathbb{P}[B] = 10^{-2}$, $\mathbb{P}[B|A] = 99\%$, gesucht $\mathbb{P}[B|A]$

Kontrolle mit Beispielwerten:

	Test positiv	Test negativ	Summe	
		$\mathbf{P}(B\|A)$		
infizierte Personen	9.900	100	10.000	
nicht infiz. Pers.	$\approx$1 Mio.	$\approx$99 Mio.	99,99 Mio.	$\mathbf{P}(A)$
Summe	1 Mio.	99 Mio.	100 Mio.	
$\mathbf{P}(A\|B)$		$\mathbf{P}(B)$		

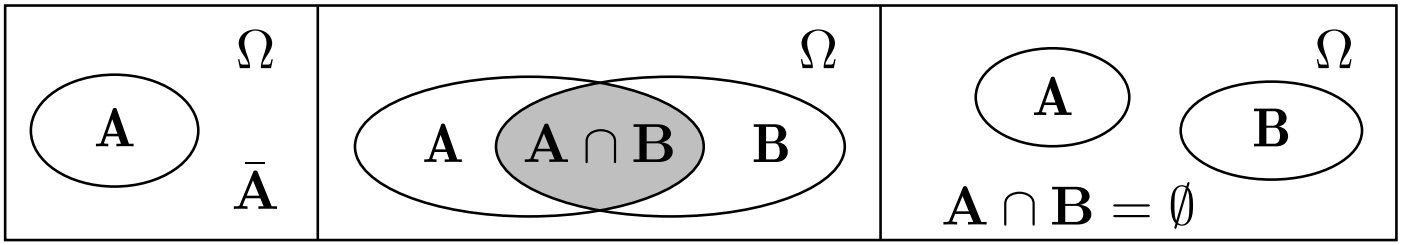
Person infiziert: $\mathbb{P}[A] = \frac{10.000}{100\,\text{Mio.}} \approx 10^{-4}$

Test positiv: $\mathbb{P}[B] = \frac{1\,\text{Mio.}}{100\,\text{Mio.}} \approx 1\%$

Test positiv, wenn Person infiziert: $\mathbb{P}[B|]\,A = \frac{9.900}{10.000} = 99\%$

Person infiziert, wenn Test positiv: $\boxed{\mathbb{P}[A|B] = \frac{9.900}{1\,\text{Mio.}} \approx 1\%\surd}$

NOT / UND / ODER von Ereignissen



NOT (Nichteintrittswahrscheinlichkeit):

$$\mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[A\right] \tag{4}$$

A – Ereignis, im Bild Element der Menge $\mathbf{A}$.

UND (gleichzeitiges Eintreten der Ereignisse A und B):

- stochastische Unabhängigkeit:

$$\mathbb{P}\left[A|B\right] = \mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\mathbb{P}\left[A \wedge B\right]}{\mathbb{P}\left[B\right]}$$

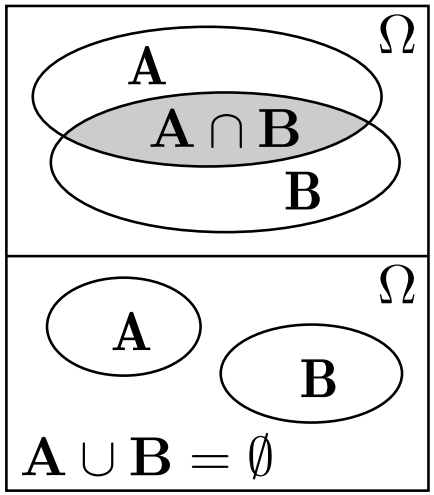
$$\mathbb{P}\left[A \wedge B\right] = \mathbb{P}\left[A\right] \cdot \mathbb{P}\left[B\right] \tag{5}$$

- sich ausschließende Ereignisse:

$$\mathbb{P}\left[A \wedge B\right] = 0 \tag{6}$$

ODER (alternatives Eintreten von A und B):

$$\mathbb{P}[A \vee B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \wedge B]$$



- stochastische Unabhängigkeit:

$$\mathbb{P}[A \wedge B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$
$$\mathbb{P}(A \vee B) = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \qquad (7)$$

- sich ausschließende Ereignisse oder sehr kleine Wahrsch.:

$$\mathbb{P}[A \wedge B] = 0$$
$$\mathbb{P}[A \vee B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] \qquad (8)$$

Für abhängige, sich nicht ausschließende Ereignisse gibt es keine einfache Lösung. Workaround: Umfomung in UND- und ODER-Terme unabhängiger oder sich ausschließender Ereignisse, z.B.:

$$A \oplus B = \underbrace{\underbrace{\left(A \wedge \bar{B}\right)}_{\text{unabhängig}} \vee \underbrace{\left(\bar{A} \wedge B\right)}_{\text{unabhängig}}}_{\text{sich gegenseitig ausschließend}}$$

$$\mathbb{P}[A \oplus B] = \mathbb{P}[A] \cdot (1 - \mathbb{P}[B]) + (1 - \mathbb{P}[A]) \cdot \mathbb{P}[B]$$

Beispiel 2.2: Unabhängiger Fehlernachweis

Ein System enthält drei unabhängig nachweisbare Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ und $p_3 = 20\%$.

Hilfestellung:

- Definition von Ereignissen F_i für Fehler i nachweisbar.
- Definition von Ereignissen A, B, C und D für die günstigen Ereignisse je Aufgabenteil und Beschreibung durch logische Gleichungen.
- Umformung in UND unabhängiger und ODER sich ausschließender Ereignisse. Nutzung Gl. (2.4), (2.5) und (2.8).

a) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle Fehler nachgewiesen?*

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird kein Fehler nachgewiesen?*

c) *Mit welcher Wahrsch. wird mindestens ein Fehler nachgewiesen?*

d) *Mit welcher Wahrsch. werden genau zwei Fehler nachgewiesen?*

$\mathbb{P}[F_i]$ Wahrscheinlichkeit, dass Fehler i nachweisbar ist.

Ein System enthält drei unabhängig nachweisbare Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ und $p_3 = 20\%$.

a) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle Fehler nachgewiesen?*

Alle Fehler werden nachgewiesen, wenn der erste und der zweite und der dritte Fehler nachgewiesen wird. UND unabhängiger Ereignisse:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F_i] &= p_i \\ A &= F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \\ \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[F_1] \cdot \mathbb{P}[F_2] \cdot \mathbb{P}[F_3] \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 10\% \cdot 5\% \cdot 20\% = 0{,}1\% \end{aligned}$$

$\mathbb{P}[A]$ Wahrscheinlichkeit, dass alle Fehler nachgewiesen werden.

Ein System enthält drei unabhängig nachweisbare Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ und $p_3 = 20\%$.

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird kein Fehler nachgewiesen?*

Kein Fehler wird nachgewiesen, wenn nicht der erste oder der zweite oder der dritte Fehler nachgewiesen wird. Umformung nach der de-morganschen Regel in UND unabhängiger Ereignisse:

$$\begin{aligned} B &= \overline{F_1 \vee F_2 \vee F_3} = \bar{F}_1 \wedge \bar{F}_2 \wedge \bar{F}_3 \\ \mathbb{P}[B] &= (1 - \mathbb{P}[F_1]) \cdot (1 - \mathbb{P}[F_2]) \cdot (1 - \mathbb{P}[F_3]) \\ &= (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 90\% \cdot 95\% \cdot 80\% = 68{,}4\% \end{aligned}$$

$\mathbb{P}[B]$ Wahrscheinlichkeit, dass kein Fehler nachgewiesen wird.

Ein System enthält drei unabhängig nachweisbare Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ und $p_3 = 20\%$.

c) *Mit welcher Wahrsch. wird mindestens ein Fehler nachgewiesen?*

Mindestens ein Fehler wird nachgewiesen, wenn nicht kein Fehler nachweisbar ist:

$$\begin{aligned} C &= \bar{B} \\ \mathbb{P}[C] &= 1 - \mathbb{P}[B] = 1 - 68{,}4\% = 31{,}6\% \end{aligned}$$

$\mathbb{P}[C]$ Wahrscheinlichkeit, dass mindestes ein Fehler nachgewiesen wird.

Ein System enthält drei unabhängig nachweisbare Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$ und $p_3 = 20\%$.

d) *Mit welcher Wahrsch. werden genau zwei Fehler nachgewiesen?*

Genau 2 Fehler werden nachgewiesen, wenn

- die ersten beiden und der dritte nicht,
- die zweiten beiden und der erste nicht oder
- der erste und der dritte, aber nicht der zweite

nachgewiesen werden. Alle UND-verknüpften Ereignisse sind unabhängig und die ODER-verküpften Terme schließen sich gegenseitig aus:

$$\begin{aligned} D &= \left(F_1 \wedge F_2 \wedge \bar{F}_3\right) \vee \left(\bar{F}_1 \wedge F_2 \wedge F_3\right) \vee \left(F_1 \wedge \bar{F}_2 \wedge F_3\right) \\ \mathbb{P}\left[D\right] &= p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 \\ &= 10\% \cdot 5\% \cdot 80\% + 90\% \cdot 5\% \cdot 20\% + 10\% \cdot 95\% \cdot 20\% = 3{,}2\% \end{aligned}$$

$\mathbb{P}\left[D\right]$ Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Fehler nachgewiesen werden.

Beispiel 2.3: Abhängiger Fehlernachweis

Die Nachweiswahrscheinlichkeit für Fehler 1 beträgt unabhängig vom Nachweis von Fehler 2 $p_1 = 10\%$. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für Fehler 2 beträgt, wenn Fehler 1 nachgewiesen, $p_2 = 20\%$ und sonst 0, d.h. der Nachweis von Fehler 2 impliziert den Nachweis von Fehler 1.

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, wenn Fehler 1 nachweisbar, sonst 0

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1 oder 2 Fehler nachweisbar sind?

Hilfestellung: Definition von Ereignissen F_i für Fehler i nachweisbar und E_i für i Fehler nachweisbar.

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, wenn Fehler 1 nachweisbar, sonst 0

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1 oder 2 Fehler nachweisbar sind?

Kein Fehler ist nachweisbar, wenn Fehler 1 nicht nachweisbar ist. Nachweis Fehler 2 und nicht Fehler 1 ausgeschlossen:

$$\begin{aligned} E_0 &= \bar{F}_1 \\ \mathbb{P}(E_0) &= 1 - \mathbb{P}[F_1] = 1 - p_1 = 1 - 10\% = 90\% \end{aligned}$$

Ein Fehler ist nachweisbar, wenn der erste Fehler nachweisbar ist und der zweite nicht:

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1 \wedge \bar{F}_2 \\ \mathbb{P}(E_1) &= p_1 \cdot (1 - p_2) = 10\% \cdot 80\% = 8\% \end{aligned}$$

$p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, wenn Fehler 1 nachweisbar, sonst 0

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1 oder 2 Fehler nachweisbar sind?

Zwei Fehler sind nachweisbar, wenn beide Fehler nachweisbar sind:

$$\begin{aligned} E_2 &= F_1 \wedge F_2 \\ \mathbb{P}(E_2) &= p_1 \cdot p_2 = 10\% \cdot 20\% = 2\% \end{aligned}$$

Probe: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der drei möglichen Ergebnisse muss 1 sein:

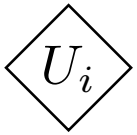
$$\mathbb{P}[E_0] + \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] = 90\% + 8\% + 2\% = 100\%\surd$$

Fehlerbaumanalyse

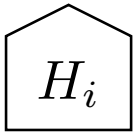
Fehlerbaumanalyse (FTA – fault tree analysis)

Graphische Darstellung für Ereignisabhängigkeiten zur Abschätzung der Eintrittswahrscheinlichkeiten von Gefahrensituationen, Ausfälle, Fehlfunktionen, ... Symbole für Ereignistypen:

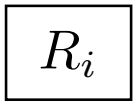
Basisereignis mit bekannter oder auf anderem Wege abgeschätzter Eintrittswahrscheinlichkeit



unerschlossenes Ereignis, über das nur unzureichende Informationen verfügbar sind



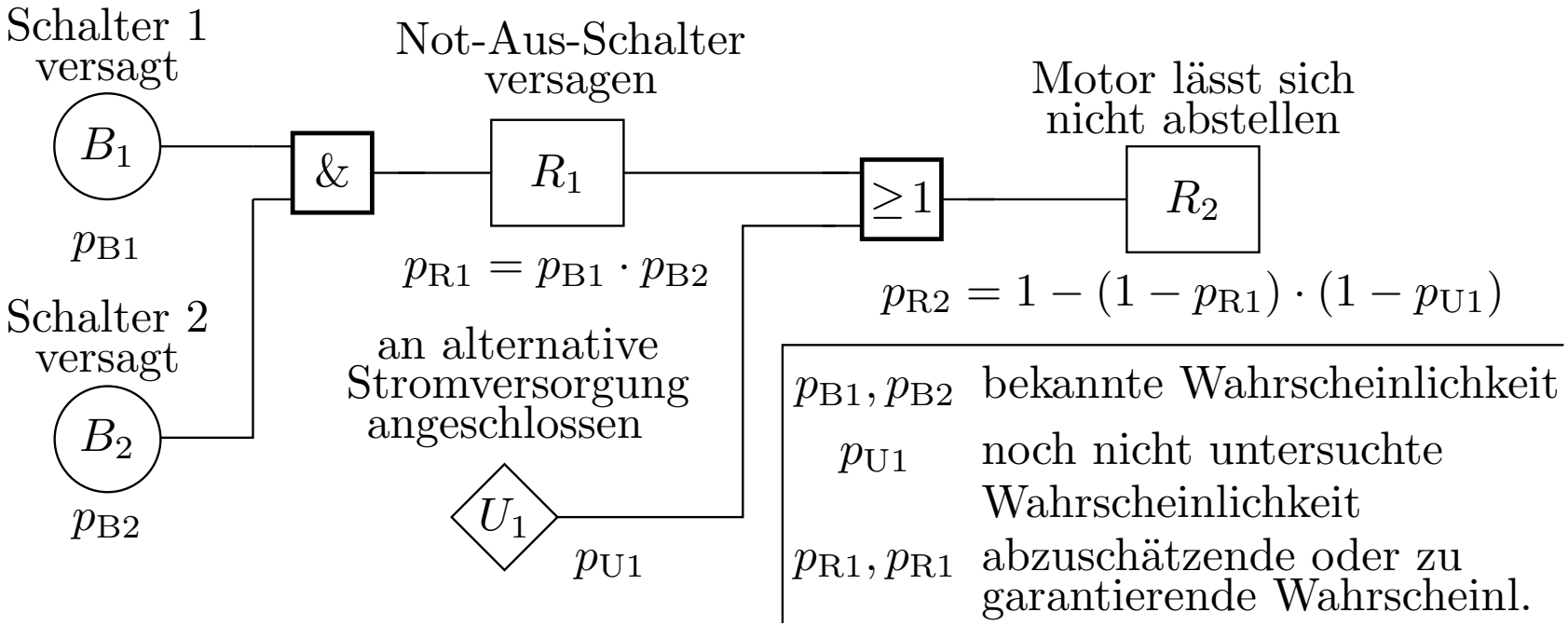
Hausereignis im gewöhnlichen Betrieb, das mit anderen zusammen Probleme verursachen kann.



resultierendes Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit aus denen von ○, ◇ oder ⬠ folgt.

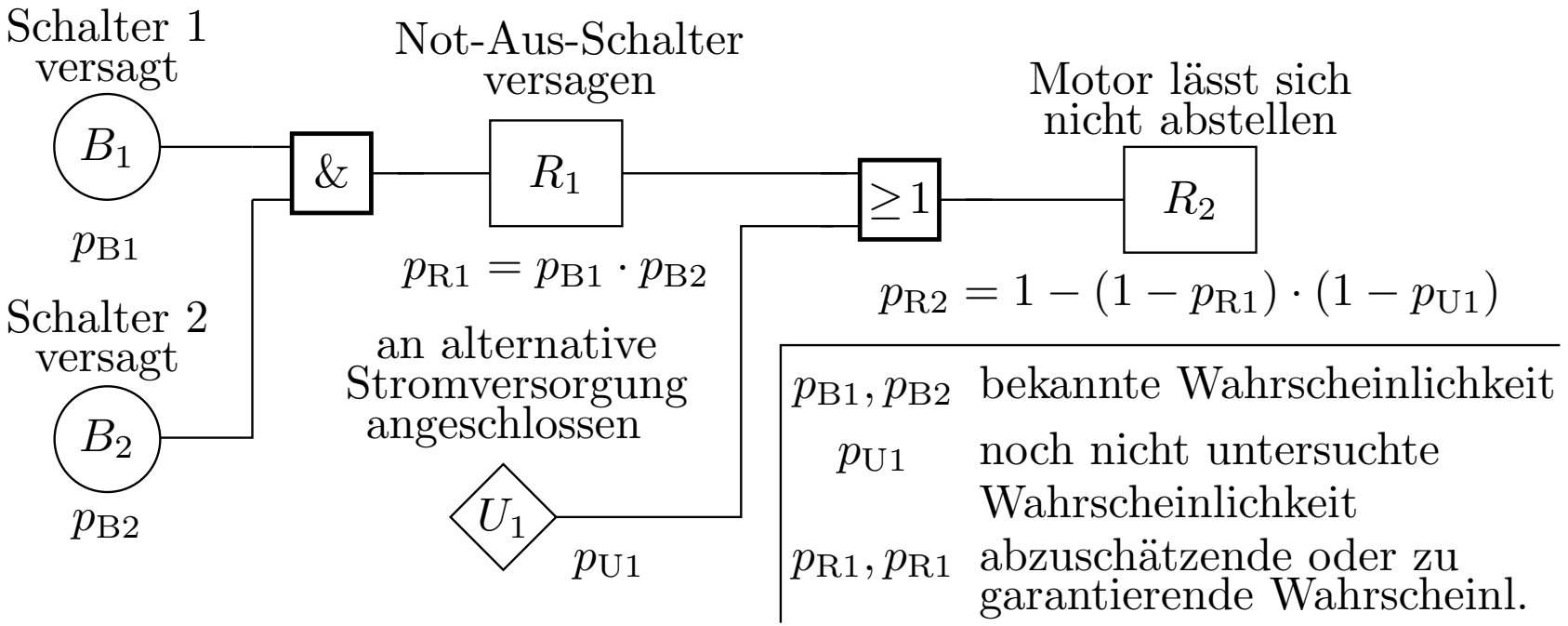
Im Unterschied zur klassischen Fehlerbaumdarstellung verwenden wir für die Darstellung der logischen UND-, ODER- und NICHT-Verknüpfungen die Schaltsymbole aus der Digitaltechnik.

Beispiel 2.4: Motor lässt sich nicht abstellen



Ist $p_{R2} \leq 10^{-6}$ *erzielbar mit* $p_{B1} = p_{B2} = 10^{-3}$*?*

B_i Basisereignis mit bekannter oder auf anderem Weg geschätzter Wahrscheinlichkeit.
R_i Resultierendes Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit geschätzt werden soll.
U_i Unerschlossenes Ereignis, über das unzureichende Information vorliegt.



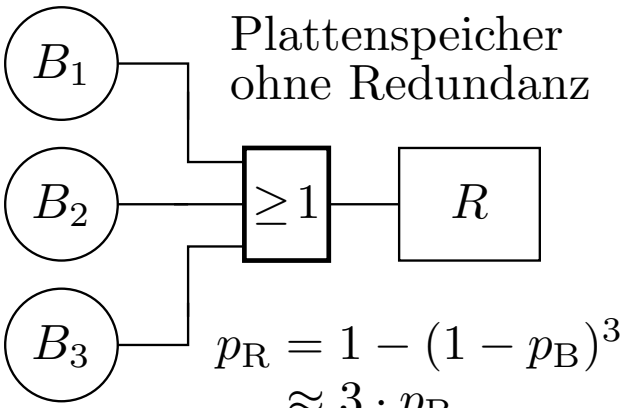
Ist $p_{R2} \leq 10^{-6}$ erzielbar mit $p_{B1} = p_{B2} = 10^{-3}$?

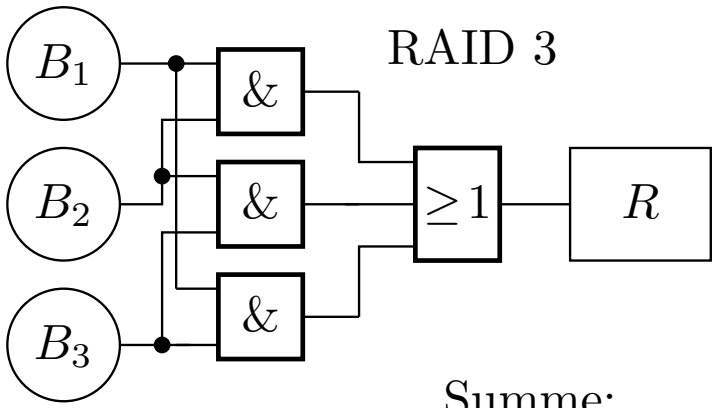
$$p_{R1} = p_{B1} \cdot p_{B2} = 10^{-6}$$
$$p_{R2} = 1 - (1 - p_{R1}) \cdot (1 - p_{U1}) \geq 10^{-6}$$

Es gibt nur die Lösung mit $p_{U1} = 0$. Lässt sich das Risiko einer alternativen Stromversorgung ausschließen oder muss die Gesamtlösung nachgebessert werden?

Datensicherheitsverbesserung durch ein RAID

Ein redundanzfreies Speichersystem aus drei Festplatten verliert Daten, wenn eine der drei Festplatten ausfällt, ein RAID 3 erst, wenn gleichzeitig zwei Platten ausfallen.





B_i	Ausfall Platte i
R	Ereignis Datenverlust
p_B	Ausfallwahrscheinlichkeit je Zeitschritt für eine Festplatte
p_R	Wahrscheinlichkeit Datenverlust je Zeitschritt Gesamtsystem

B_3	B_2	B_1	R	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$p_B^2 \cdot (1 - p_B)$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$p_B^2 \cdot (1 - p_B)$
1	1	0	1	$p_B^2 \cdot (1 - p_B)$
1	1	1	1	p_B^3

Summe:

$$p_R = 3 \cdot p_B^2 - 2 \cdot p_B^3$$

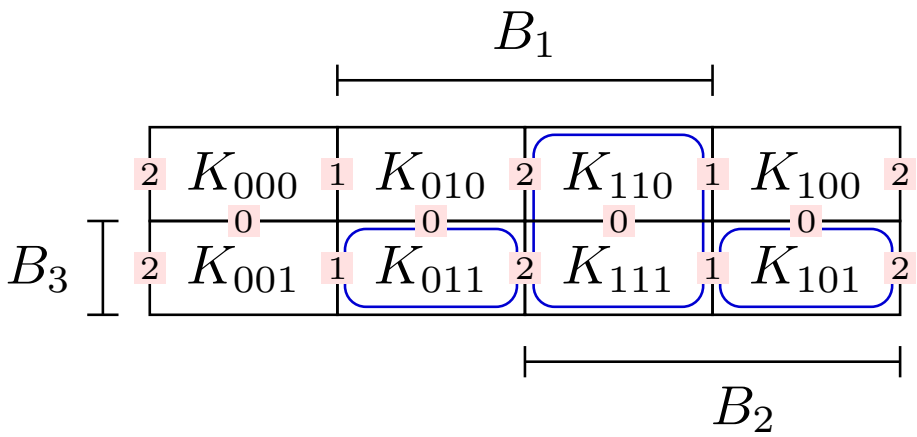
Rekonvergente Auffächerungen

Wenn sich der Bedingungsfluss verzweigt und wieder zusammentrifft, werden zum Teil abhängige Ereignisse verknüpft. Im Beispiel

$$R = B_1 B_2 \vee B_2 B_3 \vee B_1 B_3$$

haben die ODER-verknüpften UND-Terme jeweils eine gemeinsame Ereignisvariable. Für Wahrscheinlichkeitsabschätzung ungeeignet.

Umstellung in Terme sich ausschließender Ereignisse:



$$\begin{aligned} R &= B_1 B_2 \vee \bar{B}_1 B_2 B_3 \vee B_1 \bar{B}_2 B_3 \\ p_R &= p_B^2 + p_B^2 \cdot (1 - p_B) + p_B^2 \cdot (1 - p_B) = 3 \cdot p_B^2 - 2 \cdot p_B^3 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung auf n Platten

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitschritt mindestens eine von n Platten versagt (1 out of n), ist:

$$p_{\mathrm{F1oo}n} = n \cdot p_{\mathrm{B}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig mindestens zwei von n Platten versagen (2 out of n), ist eins abzüglich der Wahrscheinlichkeiten, dass null oder eine Platte versagen:

$$p_{\mathrm{F2oo}n} = 1 - \underbrace{\left(\underbrace{(1-p_{\mathrm{B}})^n}_{\text{keine Platte}} + \underbrace{n \cdot p_{\mathrm{B}} \cdot (1-p_{\mathrm{B}})^{n-1}}_{n \text{ Möglichkeiten für eine Platte}} \right)}_{\text{mindestens zwei Platten}}$$

$p_{\mathrm{B}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte im Zeitschritt ausfällt.
$p_{\mathrm{F}k\mathrm{oo}n}$	Wahrscheinlichkeit, daß k von n Festplatten im Zeitschritt ausfallen.

Geschichte der Fehlerbaumanalyse

- Einführung 1960: Abschlusssicherheitsbewertung von Interkontinentalraketen vom Typ LGM-30 Minuteman.
- Folgejahre: Auch für Sicherheitsbewertung kommerzieller Flugzeuge.
- Ab 70er bis 80er Jahre: Sicherheitsbewertung Atomkraftwerke.
- Später auch Automobilindustrie und deren Zulieferer.

Beim Einsatz zur Sicherheitsbewertung

- sind die sicherheitsrelevanten Ereignisse,
- die Basisereignisse und
- deren Wahrscheinlichkeiten

zuvor auf andere Weise abzuschätzen: Vorexperimente, Expertenbefragungen, Ursache-Wirkungs- (Ishikawa-) Diagramme, ...

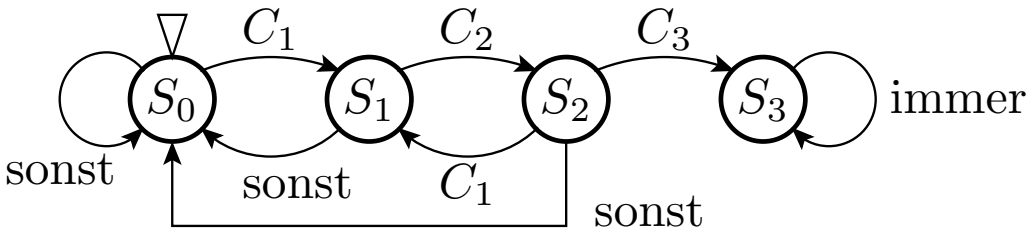
Schätzfehler: unberücksichtigte Schadensereignisse, Einflüsse, ...
Für Interkontinentalraketen mit Atomsprengköpfen nicht sehr vertrauenserweckend.

Markov-Ketten

Markov-Ketten

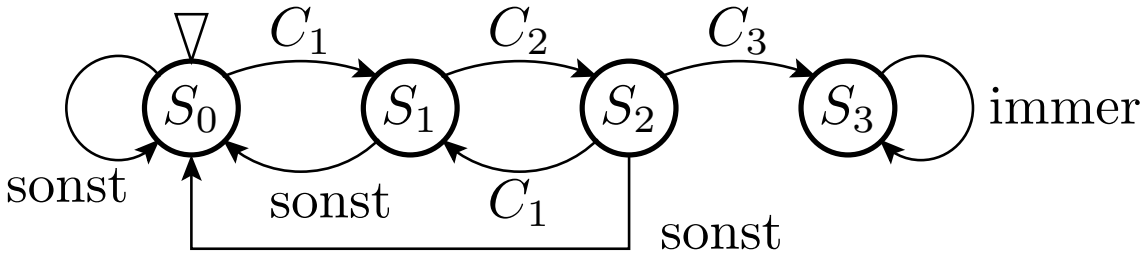
Eine Markov*-Kette (MC) ist ein stochastisches Modell für Ereignisfolgen, bei dem die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses nur von Vorzustand abhängt.

Zustandsautomat Fehlernachweis mit Eingabefolge $C_1C_2C_3$:

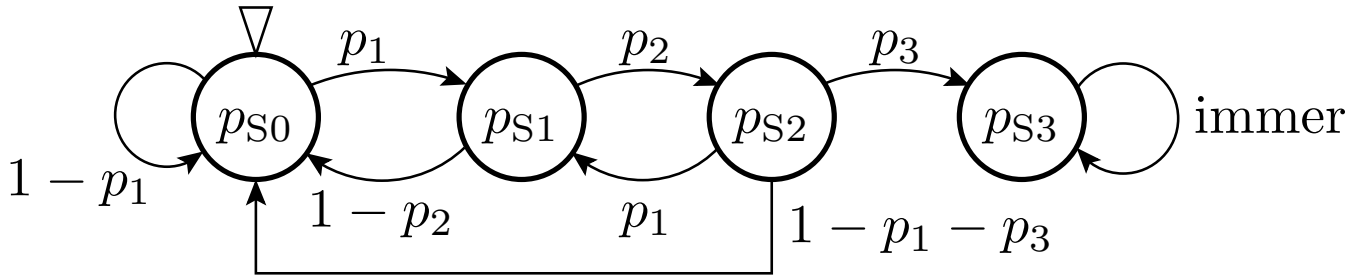


Start im Zustand S_0 »keine richtige Eingabe« und Verbleib nach drei richtigen Eingaben im Zustand S_3 »Fehler nachgewiesen«.

S_i Zustand i der Markov-Kette (State i of Markov chain).
C_j Übergangsbedingung j (Transitional condition j).
* Andrej Andreevič Markov, russischer Mathematiker, 1856-1922.



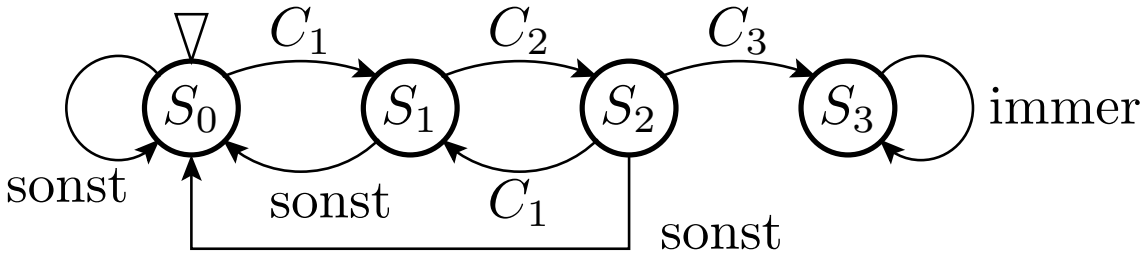
In der Markov-Kette werden Übergangsbedingungen durch die Übergangswahrscheinlichkeiten und Zustände durch Zustandswahrscheinlichkeiten ersetzt.



Zu Beginn hat der Startzustand S_0 die Wahrscheinlichkeit $p_{S0} = 1$ und die anderen Zustände haben die Wahrscheinlichkeit $p_{S.i}|_{i\neq 0} = 0$.

---

p_{Si} Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
p_i Übergangswahrscheinlichkeit hier von Zustand $i-1$ in Zustand i.



Eine Markov-Kette beschreibt ein lineares Gleichungssytem zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten für den Folgeschritt:

$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{S0}} \\ p_{\mathrm{S1}} \\ p_{\mathrm{S2}} \\ p_{\mathrm{S3}} \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 1-p_2 & 1-p_1-p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{S0}} \\ p_{\mathrm{S1}} \\ p_{\mathrm{S2}} \\ p_{\mathrm{S3}} \end{pmatrix}_{n-1}$$

mit $\begin{pmatrix} p_{\mathrm{S0}} & p_{\mathrm{S1}} & p_{\mathrm{S2}} & p_{\mathrm{S3}} \end{pmatrix}_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Kontrollkriterien für Gleichungssystem und Simulationsergebnis:

- Summe der Wahrscheinlichkeiten je Matrixspalte eins.
- Summe aller p_{Si} in jedem Schritt muss eins sein.

$(\ldots)^T$ Transponierte Matrix (Tausch von Zeilen und Spalten).
n Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.

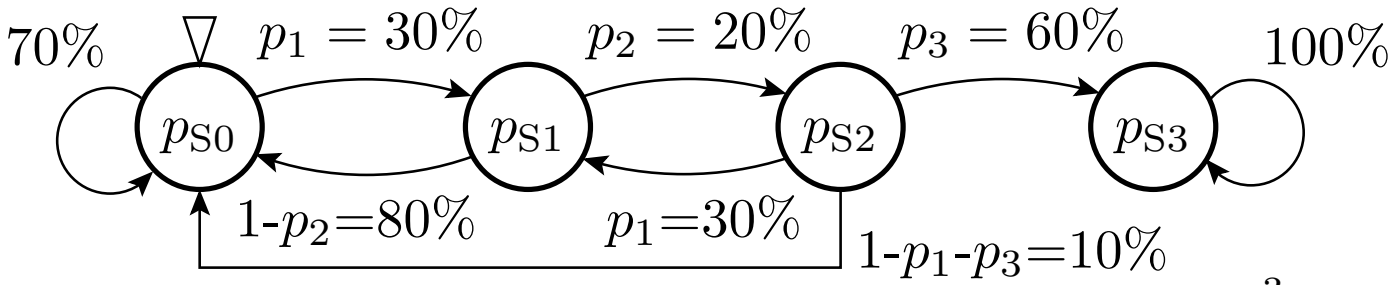
$$\begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S3} \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 1-p_1 & 1-p_2 & 1-p_1-p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S3} \end{pmatrix}_{n-1}$$

Simulation mit Octave bzw. Matlab:

```
p1 = ...;  p2 = ...;  p3 = ...;
M=[1-p1  1-p2  1-p1-p3  0;
     p1    0       0     0;
      0    p2      p1    0;
      0    0       p3    1];
S=[1;  0;  0;  0];
for idx=1:100
 S = M * S;
 printf('%3i␣%6.2f%%␣%6.2f%%␣%6.2f%%␣%6.2f%%\n',idx,100*S);
end;
```

Beispielsimulation

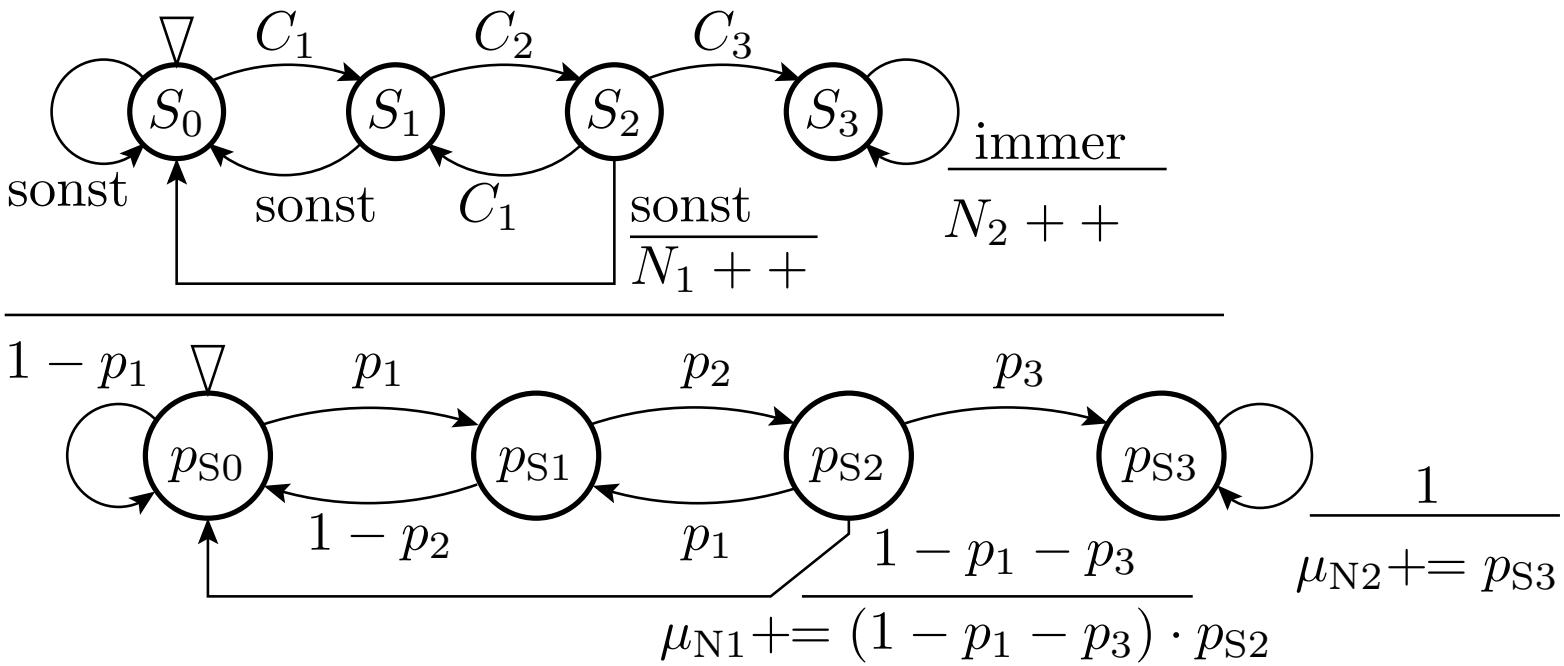
Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_1 = 30\%$, $p_2 = 20\%$ und $p_3 = 60\%$:



Schritt	p_{S0}	p_{S1}	p_{S2}	p_{S3}	$\sum_{i=0}^{3} p_{Si}$
0	100,00%	0	0	0	100%
1	70,00%	30,00%	0	0	100%
2	73,00%	21,00%	6,00%	0	100%
3	68,50%	21,90%	6,00%	3,60%	100%
4	66,07%	20,55%	6,18%	7,20%	100%
...	...	...	...	...	...
10	51,52%	16,11%	4,88%	27,49%	100%
...	...	...	...	...	...
50	9,89%	3,09%	0,94%	86,08%	100%
...	...	...	...	...	...
100	1,26%	0,39%	0,12%	98,23%	100%

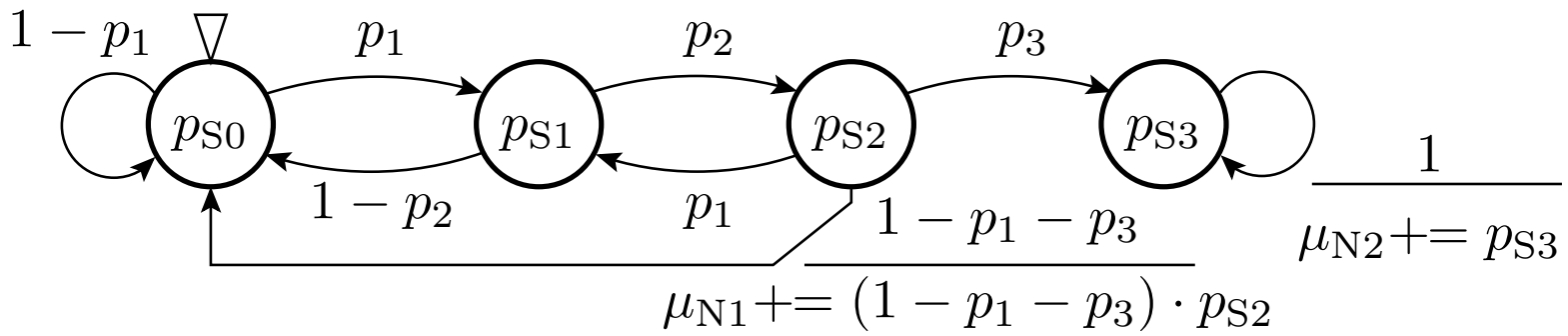
Kantenzähler

Mit Zählern an den Kanten lässt sich die Anzahl bzw. die zu erwartende Anzahl der Kantenübergänge, bestimmen:



n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.
N_1	Zähler, wie oft nach zwei richtigen Eingaben eine falsche folgt.
N_2	Zähler für die Anzahl der Schritte nach dem Fehlernachweis.
μ_{Ni}	Zu erwartende Kantenübergangsanzahl.
$n - \mu_{N2}$	Zu erwartende Schrittanzahl bis zum Fehlernachweis.

Die Summationsvariablen der Übergangswahrscheinlichkeiten an den Kanten berechnen die Erwartungswerte der Kantenzähler.



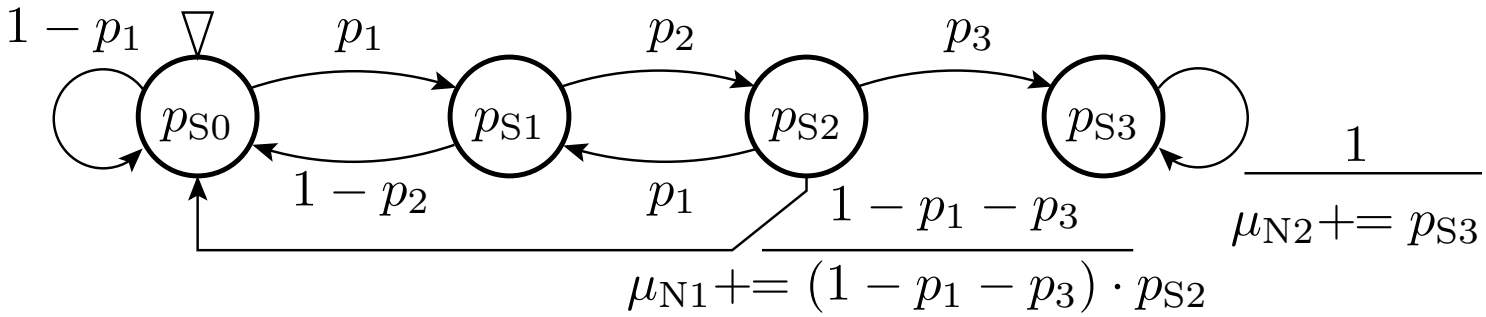
Erweiterung des Simulationsprogramms:

```
...
N1=0; N2=0;

for idx=1:100
 Z = M * Z;
 N1 = N1+Z(3)*(1-p1-p3);
 N2 = N2+Z(4);
 printf('%3i %6.2f%% %6.2f%% %6.2f%% %6.2f%%',idx,100*Z);
 printf('%6.2f %6.2f\n', N1, N2);
end;
```

Beispielsimulation

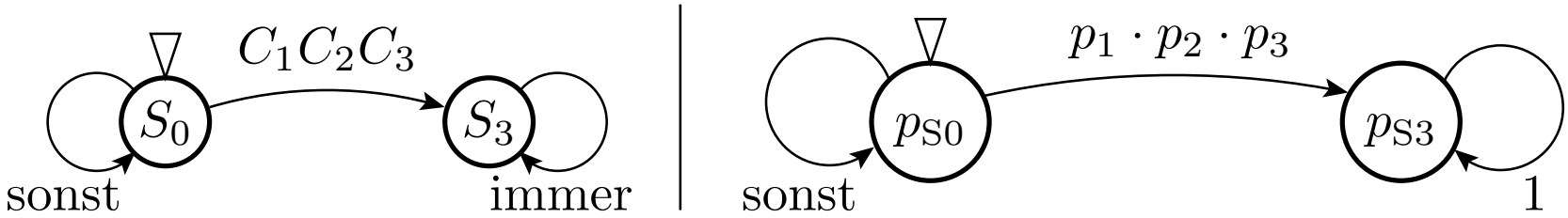
Übergangswahrscheinlichkeiten: $p_1 = 30\%$, $p_2 = 20\%$ und $p_3 = 60\%$



Schritt	p_{S0}	p_{S1}	p_{S2}	p_{S3}	μ_{N1}	μ_{N2}
1	70,00%	30,00%	0	0	0	0
2	73,00%	21,00%	6,00%	0	0,01	0
3	68,50%	21,90%	6,00%	3,60%	0,01	0,04
4	66,07%	20,55%	6,18%	7,20%	0,02	0,11
...	...	...	...	...	...	...
10	51,52%	16,11%	4,88%	27,49%	0,05	1,27
...	...	...	...	...	...	...
50	9,89%	3,09%	0,94%	86,08%	0,14	27,36
...	...	...	...	...	...	...
100	1,26%	0,39%	0,12%	98,23%	0,16	74,48

Zu erwartende Anzahl der Schritte bis zum Nachweis: $n - \mu_{N2} \approx 25$

»Drei richtige Eingaben« als Einzelereignis



Gleichungssystem der modifizierten Markov-Kette:

$$\begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S3} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 & 0 \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S3} \end{pmatrix}_n \text{ mit } \begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S3} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

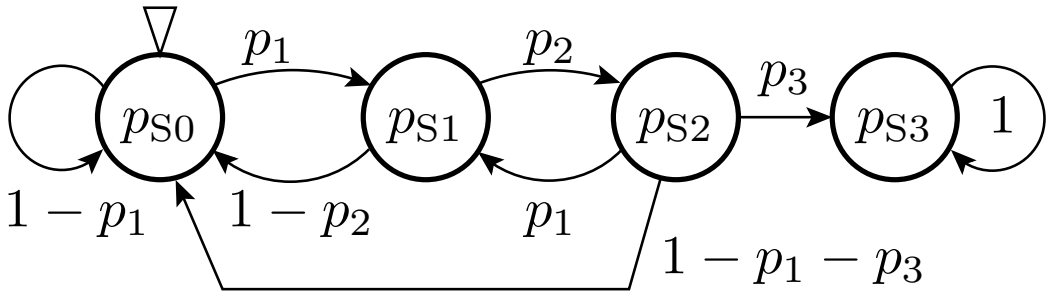
$$\begin{aligned} p_{S0}(n) &= (1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \cdot p_{S0}(n-1) = (1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^n \\ &= \mathrm{e}^{\ln(1-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \cdot n} \approx \mathrm{e}^{-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n} \quad \text{für } p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ll 1^* \\ p_{S3}(n) &= 1 - p_{S0}(n) = 1 - (1 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3)^n \\ &\approx 1 - \mathrm{e}^{-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n} \quad \text{für } p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ll 1^* \end{aligned}$$

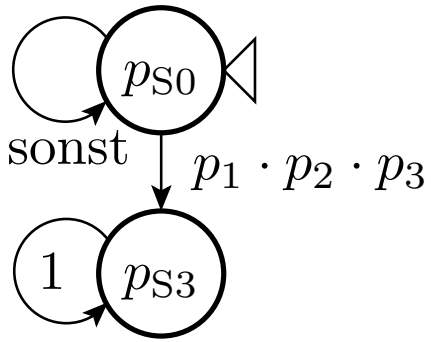
---

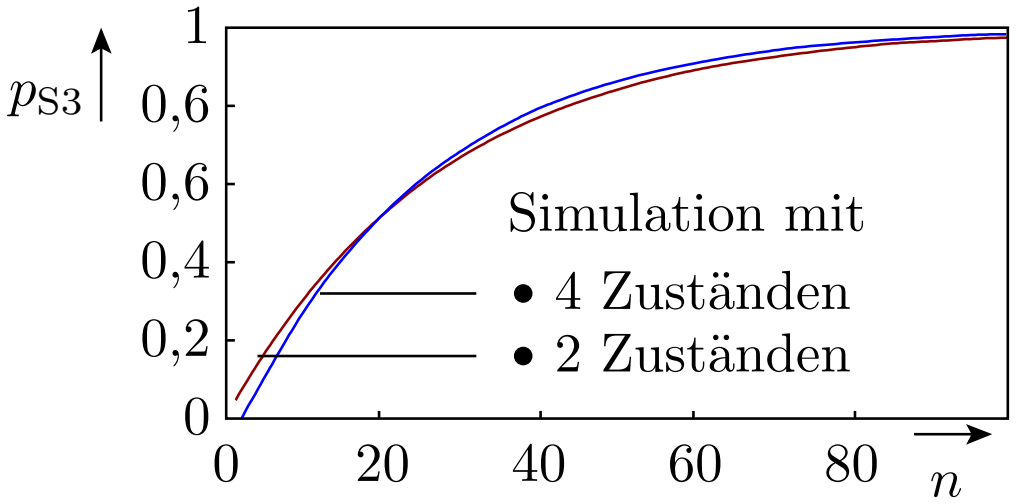
* Annäherung durch das erste Glied der Taylor-Reihe:

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

Unterschied zwischen beiden Markov-Ketten



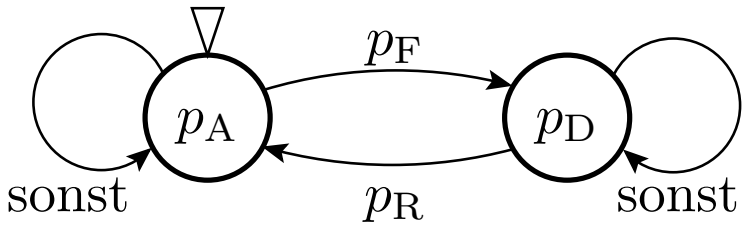




Offenbar doch nicht ganz identisches Verhalten, aber sehr ähnliches.

Abschätzung einer Verfügbarkeit

Ein System sei zu Beginn funktionsfähig (Zustand A), fällt in jedem Zeitschritt, wenn es ganz ist, mit einer Wahrscheinlichkeit p_F aus (Übergang in Zustand D) und wird, wenn es kaputt ist, innerhalb des Zeitschritts mit einer Wahrscheinlichkeit p_R repariert (Übergang in Zustand A):

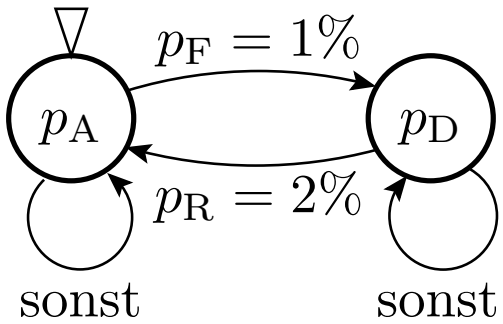


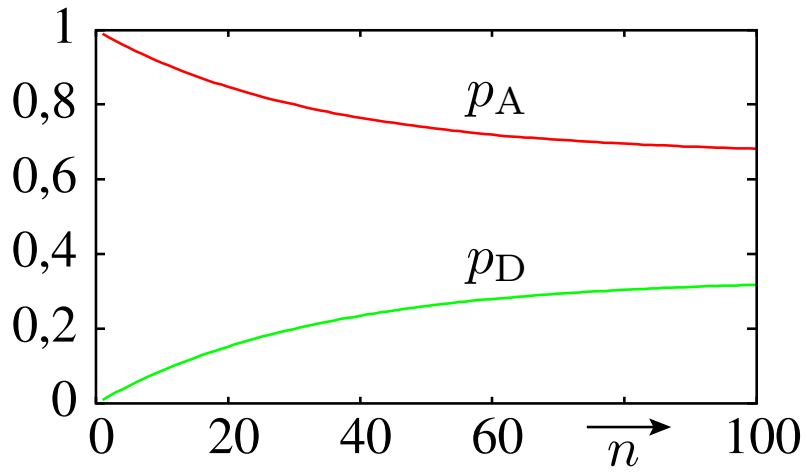
Modellierung als simulierbares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} p_\mathrm{A} \\ p_\mathrm{D} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1-p_\mathrm{F} & p_\mathrm{R} \\ p_\mathrm{F} & 1-p_\mathrm{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_\mathrm{A} \\ p_\mathrm{D} \end{pmatrix}_n \text{ mit } \begin{pmatrix} p_\mathrm{A} \\ p_\mathrm{D} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

p_A	Wahrscheinlichkeit, dass das System verfügbar (available) ist.
p_D	Wahrscheinlichkeit, dass das System defect ist.
p_F	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt ausfällt.
p_R	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt repariert wird.
n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.

Beispielsimulation





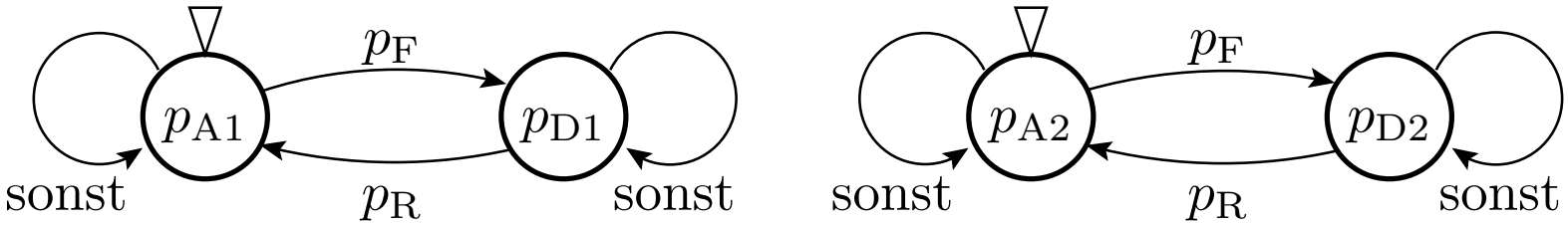
Die Zustandswahrscheinlichkeiten streben gegen stationäre Werte:

$$p_A = \frac{p_R}{p_R+p_F} = \frac{2\%}{1\%+2\%} = 66{,}7\%$$
$$p_D = \frac{p_F}{p_R+p_F} = \frac{1\%}{1\%+2\%} = 33{,}3\%$$

p_A	Wahrscheinlichkeit, dass das System verfügbar (available) ist.
p_D	Wahrscheinlichkeit, dass das System defect ist.
p_F	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt ausfällt.
p_R	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt repariert wird.

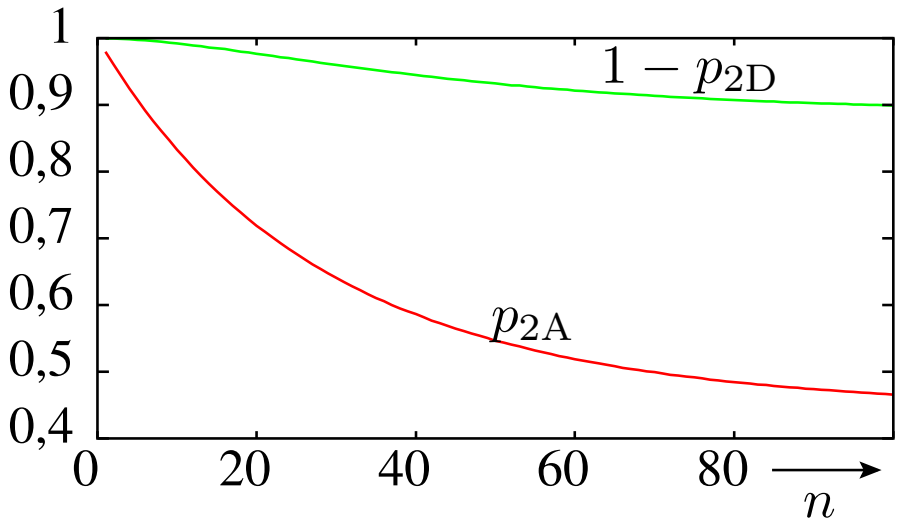
Reparaturprozess für ein 1oo2 System

System aus zwei gleichartigen Teilsystemen, das solange funktioniert, wie 1 von (**o**ut **o**f) 2 Teilsystemen funktioniert:




```
pF=0.01; pR=0.02;
M=[1-pF  pR; pF  1-pR];
S=[1; 0];
for n=1:100
  S = M * S;
  p2A(n)=S(1)**2; % beide Einheiten ganz
  p2D(n)=S(2)**2; % beide Einheiten defekt
end;
plot(1:100, p2A, 1:100, 1-p2D)
```

Beispielsimulation mit $p_\mathrm{F} = 1\%$ und $p_\mathrm{R} = 2\%$



beide Systeme verfügbar	$p_{2\mathrm{D}} = p_\mathrm{D}^2$	$\lim_{\to\infty}(p_{2\mathrm{D}}) = (1/3)^2$
kein System verfügbar	$p_{2\mathrm{A}} = p_\mathrm{A}^2$	$\lim_{\to\infty}(p_{2\mathrm{A}}) = (2/3)^2$
mindestens ein System verfügbar	$1 - p_{2\mathrm{D}}$	$\lim_{\to\infty}(\ldots) = 1 - (1/9)$

n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.
p_F	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt ausfällt.
p_R	Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitschritt repariert wird.
$1 - p_{2\mathrm{D}}$	Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein System verfügbar ist.
$p_{2\mathrm{A}}$	Wahrscheinlichkeit, daß beide Systeme verfügbar sind.

Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeit verkettete Ereignisse

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \wedge B]}{\mathbb{P}[B]} \tag{2.2}$$

Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[A|B] \cdot \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} \tag{2.3}$$

Gegenwahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathbb{P}[A] \tag{2.4}$$

UND unabhängiger Ereignisse:

$$\mathbb{P}[A \wedge B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \tag{2.5}$$

UND sich ausschließerder Ereignisse:

$$\mathbb{P}[A \wedge B] = 0 \tag{2.6}$$

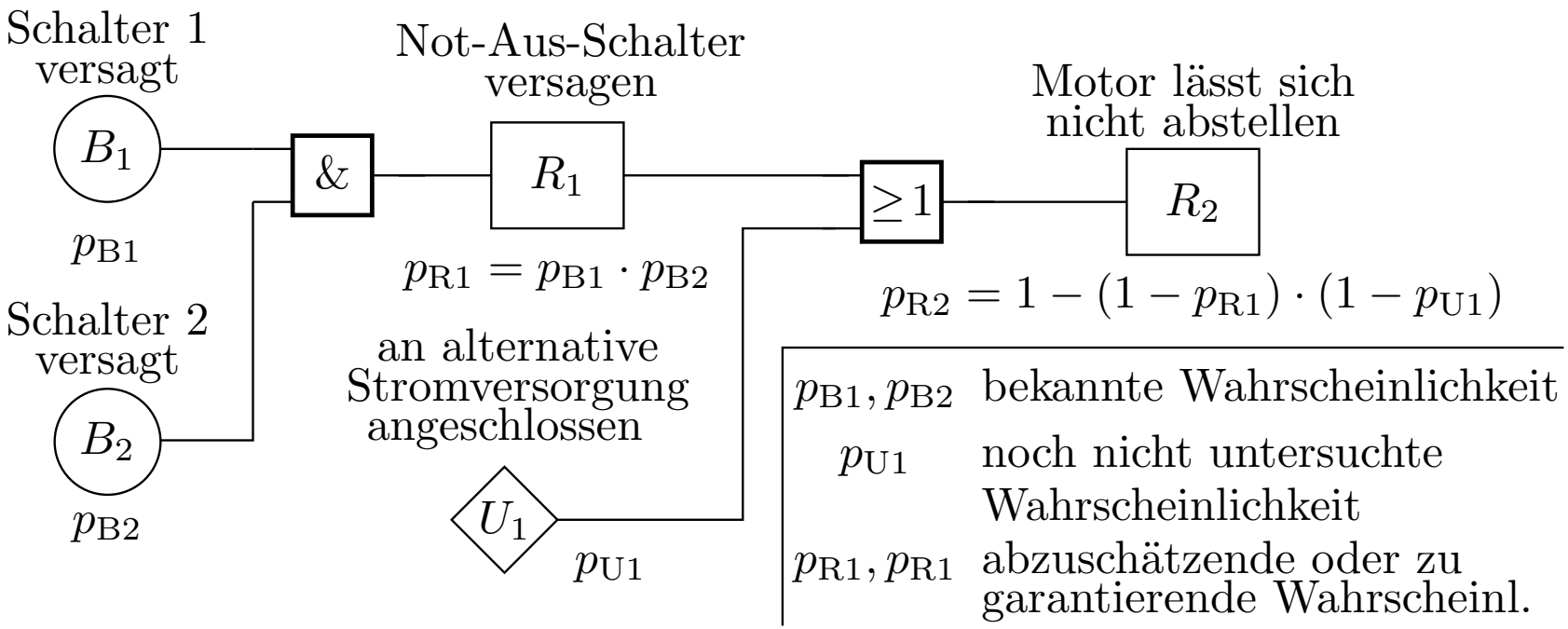
ODER unabhängiger Ereignisse:

$$\mathbb{P}[A \vee B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \tag{2.7}$$

Oder sich ausschließender Ereignisse:

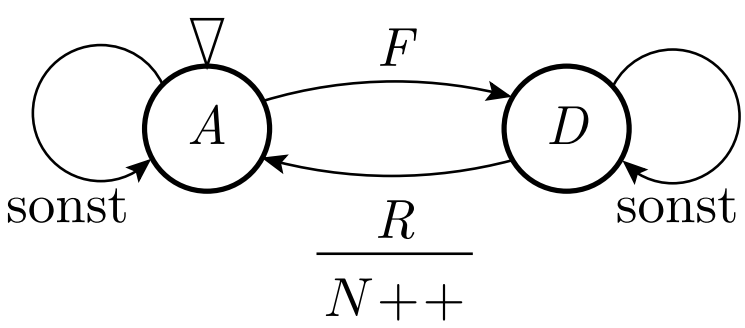
$$\mathbb{P}[A \vee B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] \tag{2.8}$$

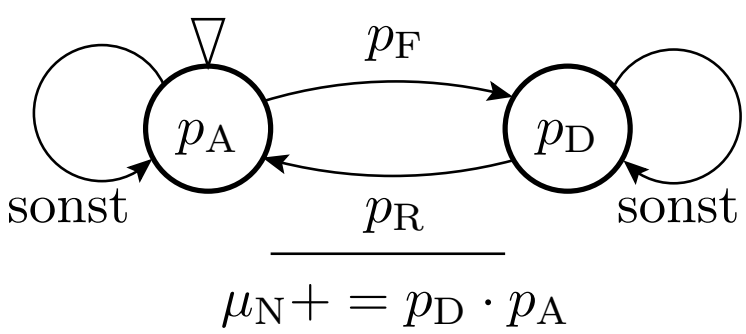
Fehlerbaumanalyse



- Graphische Darstellung verketteter Ereignisse.
- Zulässige Ereignisverknüpfungen: NOT, UND und ODER unabhängiger oder sich gegenseitig ausschließender Ereignisse.

Markov-Ketten





$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1-p_F & p_R \\ p_F & 1-p_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_A \\ p_D \end{pmatrix}_n \text{ mit } \begin{pmatrix} p_A \\ p_D \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_N = \mu_N + p_D \cdot p_A$$

Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeit für Sachverhalte, die sich durch endliche Automaten beschrieben lassen:

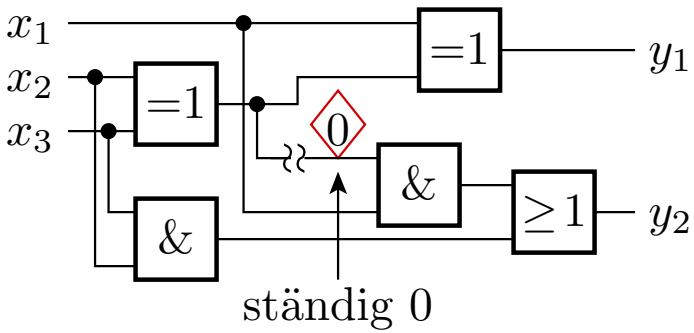
- Fehlernachweis,
- Fehlerentstehung,
- Verfügbarkeit, ...

Kantenzähler für die zu erwartende Anzahl der Übergänge.

Fehlernachweis

Ohne Gedächtnis

Operationsprofil



Eingaben die den Fehler nachweisen

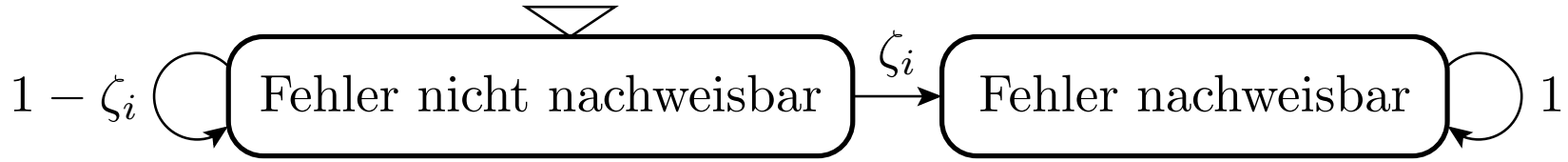
Eingabe x_3 x_2 x_1	Ausgabe y_2 y_1	Auftrittshäufigkeit der Eingabewerte		
0 0 0	0 0	0,125	0,1	0,1
0 0 1	0 1	0,125	0,05	0,1
0 1 0	0 1	0,125	0,15	0,2
0 1 1	1 0	0,125	0,2	0,05
1 0 0	0 1	0,125	0,05	0,2
1 0 1	1 0	0,125	0,2	0,05
1 1 0	1 0	0,125	0,05	0,2
1 1 1	1 1	0,125	0,2	0,1
Nachweiswahrscheinlichkeit:		0,25	0,4	0,1

Der eingezeichnete sa0-Fehler (Gattereingang ständig 0) ist mit zwei der acht möglichen Eingabewerte nachweisbar. Die MF-Rate ζ_i ist gleich Summe der Auftrittshäufigkeiten beider Eingaben und hängt offenbar erheblich von deren Auftrittshäufigkeiten ab.

Operationsprofil

Beschreibung der relativen Häufigkeiten der Eingaben, der Funktionnutzung, ... im Einsatz oder während des Tests.

Nachweiswahrscheinlichkeit eines Fehlers



Ein Fehler i ist nachweisbar, wenn er mindestens eine MF verursacht. Die Nachweiswahrscheinlichkeit je Service-Anforderung ist die fehlerbezogenen MF-Rate ζ_i. Nachweiswahrscheinlichkeit mit N DS bzw. Tests:

$$p_i\left(N\right) = 1 - \left(1-\zeta_i\right)^N = 1 - \mathrm{e}^{\ln(1-\zeta_i)\cdot N}$$

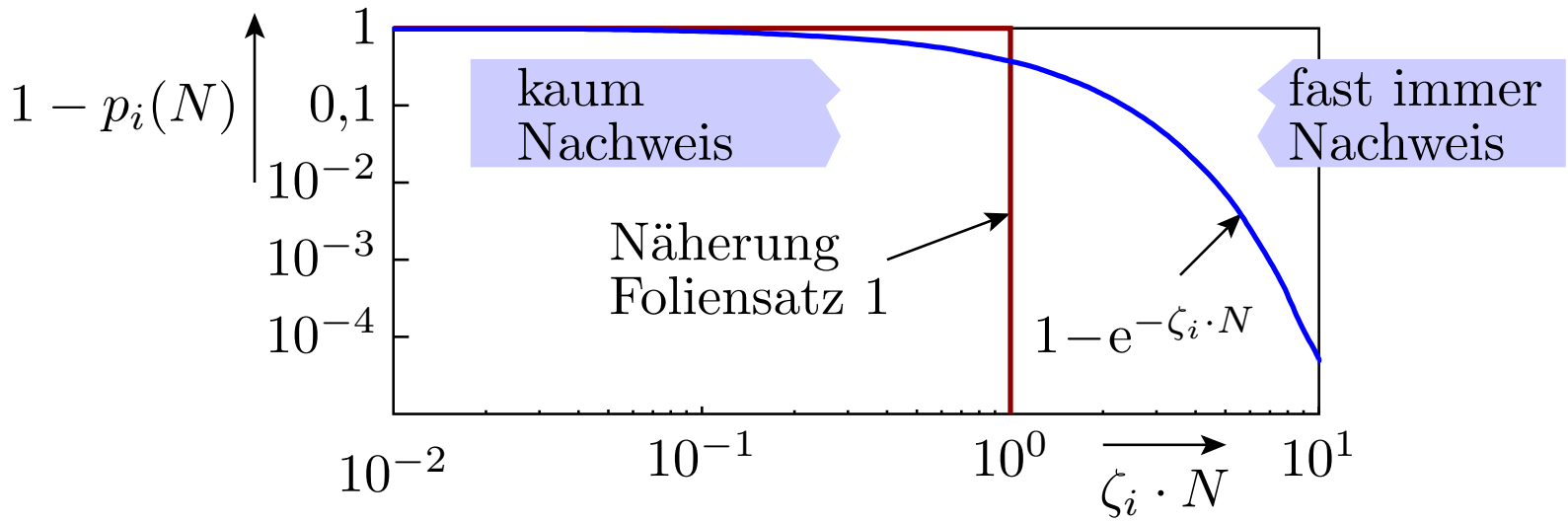
Für $\zeta \ll 1$ nach Tailor-Reihe $\ln\left(1-\zeta\right) = -\left(\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} + \ldots\right) \approx -\zeta$:

$$p_i\left(N\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i\cdot N} \tag{9}$$

Voraussetzungen: $\zeta_i \leq 0{,}1$ und während des Tests konstant.

$p_i\left(N\right)$	Nachweiswahrscheinlichkeit von Fehler i mit N Tests.
ζ_i	MF-Rate verursacht durch Fehler i.
N	Anzahl der Tests.
DS	Erbrachte Service-Leistung.

Vergleich mit der Annahme auf Foliensatz 1



Annahme Foliensatz 1 Folie 1.145:

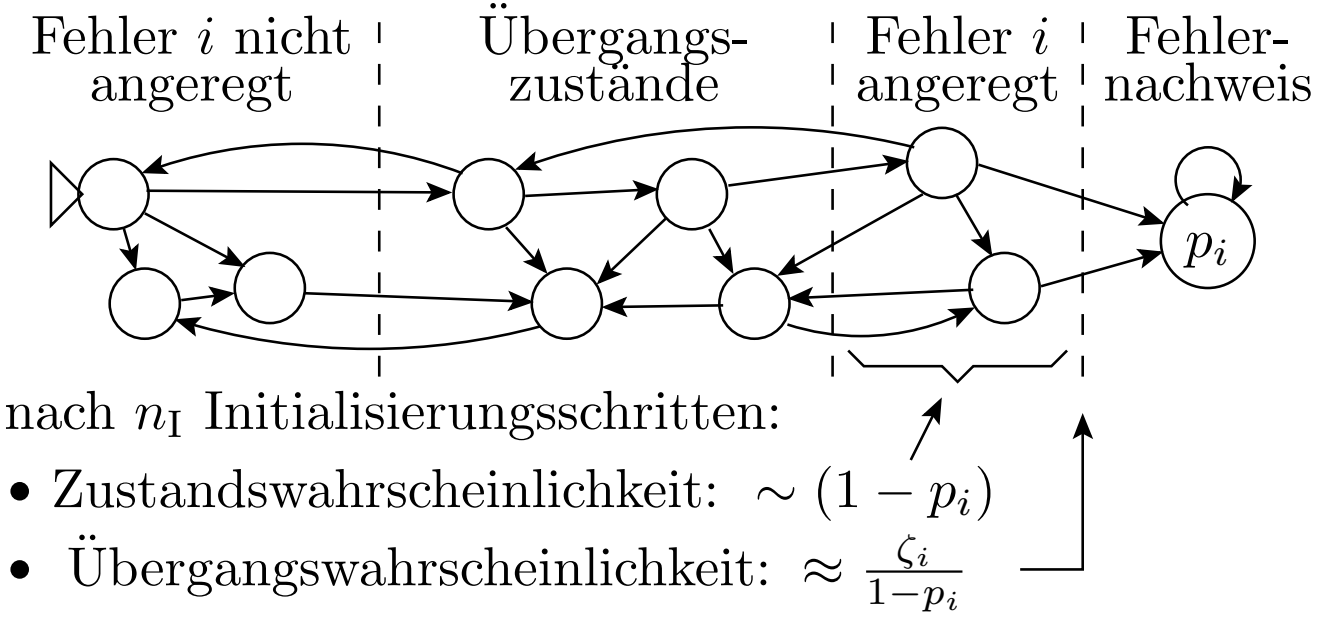
- Fehler mit $\zeta_i \cdot N \geq 1$ werden nachgewiesen (und beseitigt) und
- Fehler mit $\zeta_i \cdot N < 1$ sind nicht nachweisbar.

Tatsächlich gilt nur

- fast immer Nachweis ab $\zeta_i \cdot N > 5$,
- kaum Nachweis bis $\zeta_i \cdot N > \frac{1}{5}$ und
- $1/\zeta_i$ ist die mittlere Nachweislänge.

Mit Gedächtnis

Service mit Gedächtnis



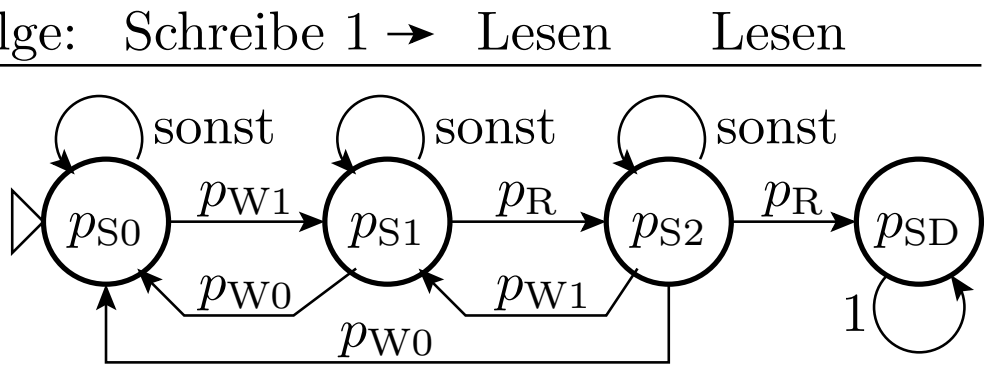
In einem Viele-Zustände-Beobachterautomat stellt sich typ. zwischen den Zuständen vor dem Nachweis nach N_I Initialisierungsschritten ein relatives Wahrscheinlichkeitsgleichgewicht ein. Wie bei Fehlern ohne Gedächtnis verhält sich dann der Wahrscheinlichkeitszufluss zum Zustand »Fehler nachgewiesen« umgekehrt proportional zu dessen Zustandswahrscheinlichkeit:

$$1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot N} < p_i\,(N) < 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot (N - N_\mathrm{I})}$$

Beispiel: Nachweiswahrsch. DR1*-Speicherfehler

Zustände:

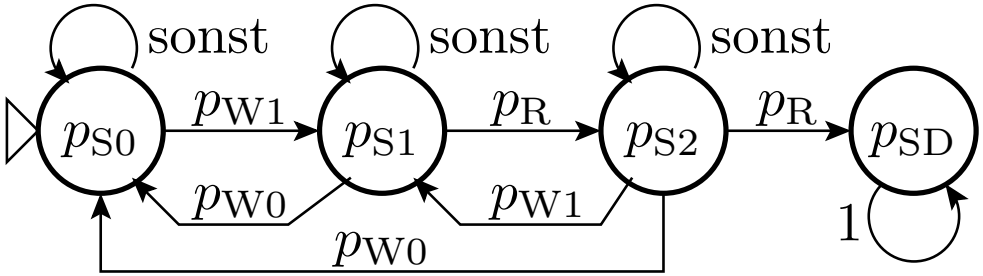
S0: Wert 0 oder unbekannt
S1: Wert 1 geschrieben
S2: 1 zerstörend gelesen
SD: Fehler nachgewiesen



Im RAM wird beim Lesen der fehlerhaften Speicherzelle mit Adresse a eine gespeicherte 1 in eine 0 verfälscht. Der Nachweis erfordert:

- Schreibe 1 auf Adresse a (Übergang in Anregungszustand S1),
- Lese Wert von Adresse a (Übergang in Anregungszustand S2),
- Lese von Adresse a ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf a (Übergang in den Nachweiszustand SD).

p_{W0}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_{W1}	Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 in die Speicherzelle geschrieben wird.
p_R	Wahrscheinlichkeit, dass die Speicherzelle gelesen wird.
*	zerstörendes Lesen einer Eins.



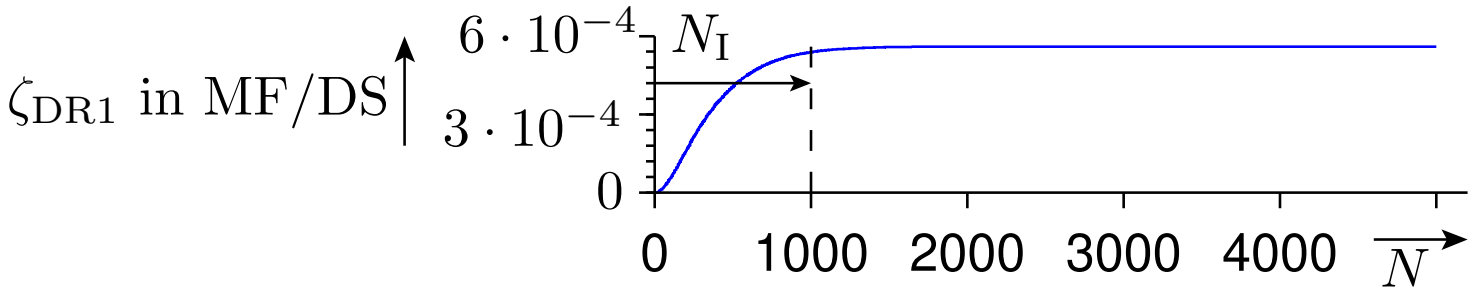

```
pS0=1; pS1=0; pS2=0; pSD(1)=0; N=5000;
NA=128; pR = 1/(2*NA); pW0 = pW1 = 1/(4*NA);
for n=1:N
   p0   = pS0 * (1-pW1) + pS1*pW0          + pS2*pW0;
   p1   = pS0 *    pW1  + pS1*(1-pW0-pR)  + pS2*pW1;
   p2   = pS1 *    pR   + pS2*(1-pW1+pW0-pR);
   pSD   = pSD(n) + pS2 * pR;
   zeta  = pS2*pR / (pS0+pS1+pS2); % MF rate
   pS0 = p0; pS1 = p1; pS2 = p2;
end
plot(1:N,
zeta);
```

Vermeidung kleiner Differenzen großer Zahlen:

$$\zeta_{\mathrm{DR1}}(N+1) = \frac{p_{\mathrm{SD}}(N+1) - p_{\mathrm{SD}}(N)}{1 - p_{\mathrm{SD}}(N)} = \frac{p_{\mathrm{S2}}(N) \cdot p_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{S0}}(N) + p_{\mathrm{S1}}(N) + p_{\mathrm{S2}}(N)}$$

p_{Si}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
p_{R}	Wahrscheinlichkeit, dass die Speicherzelle gelesen wird.
ζ_{DR1}	MF-Rate verursacht durch den DR1-Fehler.
N	Anzahl der Tests.

Simulation



Die durch den Fehler verursachte MF-Rate ζ_i nimmt anfangs mit der Testanzahl N zu und bleibt dann konstant, etwa $\zeta_{\mathrm{DR1}} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-4}$ ab $N_{\mathrm{I}} \approx 1000$.

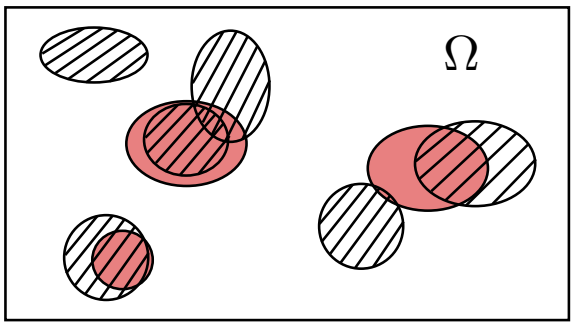
Für lange Zufallstests $N \gg N_{\mathrm{I}}$ kann die MF-Rate von Fehlern in Systemen mit Gedächtnis überwiegend als konstant betrachtet werden. Zunahme der Nachweiswahrscheinlichkeit wie ohne Gedächtnis Gl. 2.9:

$$p_{\mathrm{DR1}}(N) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_{\mathrm{DR1}} \cdot N}$$

$p_{\mathrm{DR1}}(N)$	Nachweiswahrscheinlichkeit des DR1-Fehlers als Funktion der Anzahl der Tests.
ζ_{DR1}	MF-Rate verursacht durch den DR1-Fehler.
N_{I}	Anzahl der Initialisierungsschritte.
N	Testanzahl, für Worst-Case-Abschätzungen ohne die N_{I} Initialisierungsschritte.

Fehler und Modellfehler

Fehler und Modellfehler



Ω Menge der Eingabewerte / Teilfolgen die einen Fehler nachweisen können

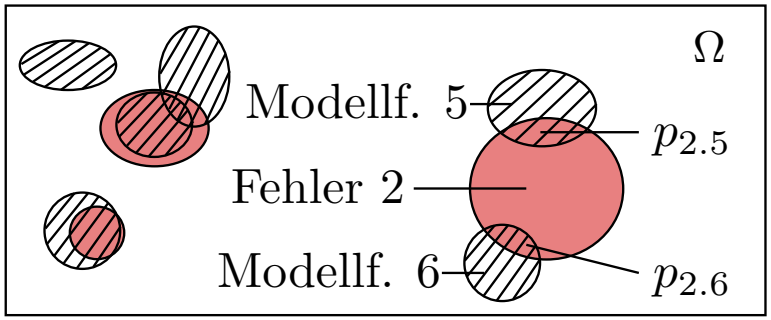
Nachweismenge eines Modellfehlers

Nachweismenge eines tatsächlichen Fehlers

- Die zu findenden Fehler sind zum Zeitpunkt der Testauswahl unbekannt. Deshalb werden für Testauswahl und Abschätzung der Fehlerüberdeckung Fehlermodelle verwendet.
- Ein Fehlermodell ist ein Algorithmus, der aus der Testobjektbeschreibung eine große Anzahl von Modellfehler erzeugt. Jeder Modellfehler ist eine andere geringe Verfälschung.
- Die Nachweismenge eines Fehlers ist die Menge der Eingaben, mit denen der Fehler nachweisbar ist.

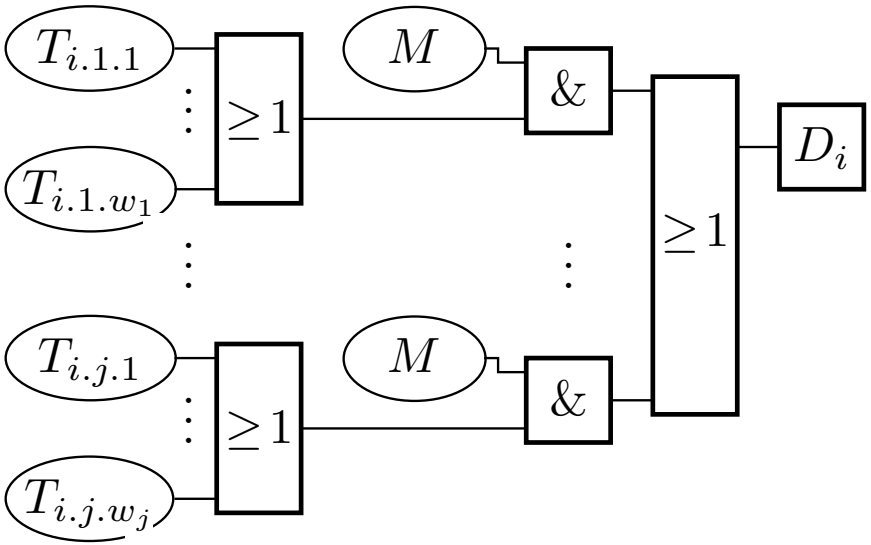
Die meisten tatsächlichen Fehler teilen sich mit mehreren Modellfehlern Nachweisbedigungen und Nachweismengen.

Gezielte Testsuche



Nachweismenge eines tatsächlichen Fehlers

Nachweismenge eines Modellfehlers



T_{ijk} Test k für Modelfehler j weist Fehler i nach:

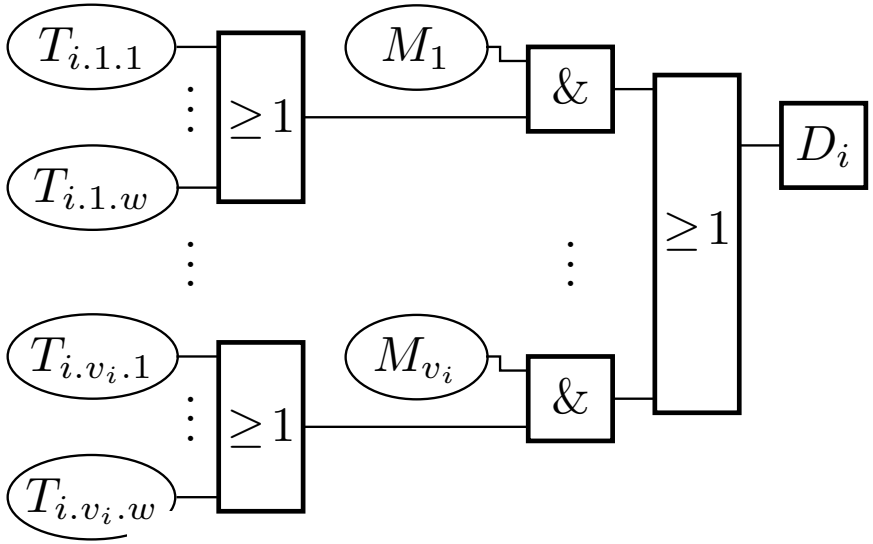
$$\mathbf{P}\left(T_{i.j.k}\right) = p_{ij} \neq f(k)$$

M für Modellfehler j werden die gesuchten w_j Tests gefunden

$$\mathbf{P}\left(M\right) = FC_{\mathrm{M}} \neq f(i,j)$$

D_i Nachweis Fehler i

Für jeden Fehler i enthält die Modellfehlermenge $j = 1$ bis v_i ähnlich nachweisbare Modellfehler, für die jeweils $w \geq 1$ Tests gesucht und mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(M\right) = \mu_{\mathrm{FM}}$ gefunden werden.



T_{ijk} Test k für Modelfehler j weist Fehler i nach:

$$\mathbf{P}\left(T_{i.j.k}\right) = p_{ij} \neq f(k)$$

M_j für Modellfehler j werden die gesuchten w Tests gefunden

$$\mathbf{P}\left(M_j\right) = FC_{\mathrm{M}} \neq f(i,j)$$

D_i Nachweis Fehler i

Testsuche ist schwierig und nur für FC_{M} Modellfehler erfolgreich (siehe Abschn. 5.2). Wenn sich ein Test finden lässt, werden mit dem w-fachen Auswand auch w Tests gefunden:

$$D_i = \bigvee_{j=1}^{v_i} \left(\left(\bigvee_{k=1}^{w_j} T_{ijk} \right) \wedge M_j \right) = \overline{\bigwedge_{j=1}^{v_i} \left(\left(\overline{\bigwedge_{k=1}^{w} \bar{T}_{ijk}} \right) \wedge M_j \right)}$$

$$p_i = \mathbb{P}\left(D_i\right) = 1 - \prod_{j=1}^{v_i} \left(1 - \left(FC_{\mathrm{M}} \cdot \left(1 - \left(1 - p_{ij}\right)^w\right)\right)\right) \tag{10}$$

w Anzahl der je Modellfehler gesuchten Tests. Gefunden werden alle oder keiner.

Zahlenbeispiel

$$p_i = 1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - (FC_{\mathrm{M}} \cdot (1 - (1 - p_{ij})^w)))$$

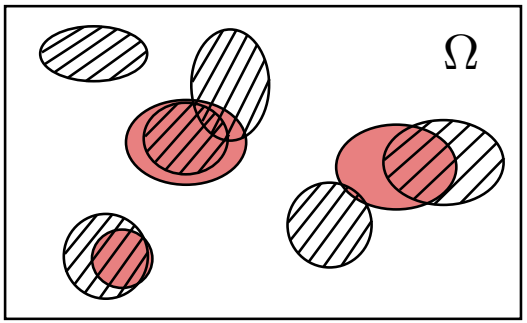
$p_{\mathrm{ij}} = 25\%$, $v_i = 5$ und $w = 1 \ldots 5$:

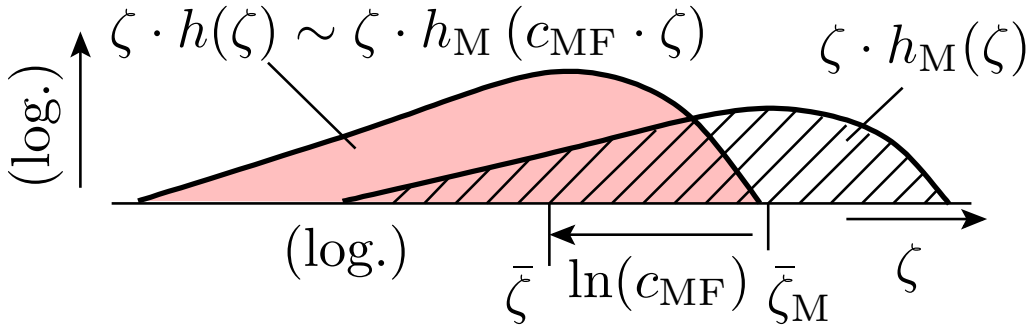
$p_i\,(w,\, FC_{\mathrm{M}})$	$w = 1$	$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$	$w = 5$
$FC_{\mathrm{M}} = 90\%$	72,0%	91,8%	97,5%	99,15%	99,70%
$FC_{\mathrm{M}} = 95\%$	74,2%	93,2%	98,1%	99,47%	99,84%

Die Nachweiswahrscheinlichkeit p_i tatsächlicher Fehler hängt weniger von der Modellfehlerüberdeckung FC_{M}, dafür aber erheblich von der Anzahl der Tests w, die für jeden Modellfehler j gesucht werden, ab.

p_i	Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler i.
v_i	Anzahll der ähnlich nachweisbaren Modellfehler für Fehler i.
FC_{M}	Modellfehlerüberdeckung.
w	Anzahl der je Modellfehler gesuchten Tests. Gefunden werden alle oder keiner.
p_{ij}	Wahrscheinlichkeit, dass ein Test, der Modellfehler j nachweist, auch Fehler i findet.

Zufälliger Fehlernachweis





Nachweismenge eines tatsächlichen Fehlers

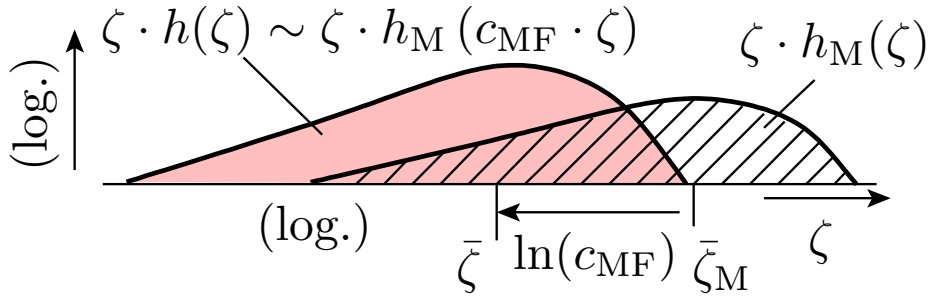
Nachweismenge eines Modellfehlers

Reale Fehler i und ihre ähnlich nachweisbaren Modellfehler j teilen sich Anregungs- und Beobachtungsbedingungen. Das lässt einen ähnlichen Verteilungsform und skalierte Skalenparameter erwarten:

$$N_0 = c_{\mathrm{MF}} \cdot N_{0.\mathrm{MF}} \quad \text{mit} \quad c_{\mathrm{MF}} = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}_{\mathrm{MF}}}$$

- $c_{\mathrm{MF}} > 1$: Modellfehler im Mittel schlechter nachweisbar
- $c_{\mathrm{MF}} < 1$: Modellfehler im Mittel besser nachweisbar.

$N_{0[.\mathrm{MF}]}$ Skalenparameter der später für die Verteilung der MF-Rate hergeleiteten Gamma-Verteilung. Gleich der bereits eingeführten effektiven Testanzahl.



Die Fehlerüberdeckung tendiert gegen die Modellfehlerüberdeckung der c_{MF}–fachen Testsatzlänge. Erforderlicher Simulationsaufwand für zu erwartende Fehlerüberdeckung gleich Modellfehlerüberdeckung:

$$N_{\mathrm{Sim}} \approx c_{\mathrm{MF}} \cdot N \quad \text{mit} \quad c_{\mathrm{MF}} = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}_{\mathrm{MF}}} \tag{11}$$

Zufällige Testauswahl stellt weniger Anforderungen an das Fehlermodell und erlaubt vertrauenswürdigere Abschätzungen der Fehlerüberdeckung aus der Modellfehlerüberdeckung.

N_{Sim}	Anzahl der zu simulierenden Tests.
N	Anzahl der Tests.
c_{MF}	Fehlermodellspezifische Skalierung der effektiven Testanzahl.
$\bar{\zeta}$	Mittlere Fehlfunktionsrate je Fehler der tatsächlichen Fehler.
$\bar{\zeta}_{\mathrm{M}}$	Mittlere Fehlfunktionsrate je Fehler der Modellfehler.

Beispiel 2.5: Fehler- und Modellfehlerüberdeckung

Eine Verlängerung von $N_1 = 100$ auf $N_2 = 10^4$ Zufallstests erkennt $FC_\mathrm{M} = 90\%$ der mit $N_1 = 100$ nicht nachweisbaren Modellfehler und weist 100 zusätzliche tatsächliche Fehler nach. Die MF-Rate der nicht nachweisbaren Modellfehler während des Tests sei etwa doppelt so groß wie die der nicht nachweisbaren tatsächlichen Fehler im Einsatz.

$N_1 = 100$, $N_2 = 10^4$, $FC_\mathrm{M} = 90\%$, $c_\mathrm{MF} = \bar{\zeta}/\bar{\zeta}_\mathrm{M} = 0{,}5$,
$\#F\,(N_1) - \#F\,(N_2) = 100$

a) *Formfaktor K unter der Annahme, dass er für tatsächliche Fehler gleich dem für Modellfehler ist?*

b) *Zu erwartende Anzahl der mit den N_2 Tests nicht nachweisbaren tatsächlichen Fehler?*

c) *Zu erwartende MF-Rate nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

d) *Wie viel Simulationszeit erfordert die Abschätzung der Fehlerüberdeckung für die effektive Testanzahl N_2, wenn die Fehlersimulation für einen Testschritt 1 s dauert?*

$N_1 = 100$, $N_2 = 10^4$, $FC_\mathrm{M} = 90\%$, $c_\mathrm{MF} = \bar{\zeta}/\bar{\zeta}_\mathrm{M} = 0{,}5$,
$\#F\left(N_1\right) - \#F\left(N_2\right) = 100$

a) *Formfaktor K unter der Annahme, dass er für tatsächliche Fehler gleich dem für Modellfehler ist?*

$$\mu_\mathrm{F}\left(N_2\right) = \mu_\mathrm{F}\left(N_1\right) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mit der $N_2/N_1 = 100$-fachen Testanzahl auf $1 - FC_\mathrm{M} = 0{,}1$:

$$K = -\frac{\ln\left(1 - FC_\mathrm{M}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} = -\frac{\ln\left(0.1\right)}{\ln\left(100\right)} = 0{,}5$$

$\mu_\mathrm{F}\left(N\right)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
N_1, N_2	Testanzahl mit bekannter oder gesuchter zu erwartender Fehleranzahl.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.

$N_1 = 100$, $N_2 = 10^4$, $FC_\mathrm{M} = 90\%$, $c_\mathrm{MF} = \bar{\zeta}/\bar{\zeta}_\mathrm{M} = 0{,}5$,
$\#F\left(N_1\right) - \#F\left(N_2\right) = 100$

b) *Zu erwartende Anzahl der mit den N_2 Tests nicht nachweisbaren tatsächlichen Fehler?*

$$\mu_\mathrm{F}\left(N_2\right) = \mu_\mathrm{F}\left(N_1\right) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

Testsatzverlängerung $N_2/N_1 = 100$ weist 100 Fehler nach:

$$\mu_\mathrm{F}\left(N_1\right) - \mu_\mathrm{F}\left(N_2\right) = \mu_\mathrm{F}\left(N_0\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K}\right) = 100$$

Zu erwartende Fehleranzahl für beide Testsatzlängen:

$$\mu_\mathrm{F}\left(N_1\right) = 100 \cdot \frac{1}{\left(1 - 100^{-0{,}5}\right)} = 111 \ [\mathrm{F}]$$

$$\mu_\mathrm{F}\left(N_2\right) = \mu_\mathrm{F}\left(N_1\right) - 100 = 11{,}1 \ [\mathrm{F}]$$

$\mu_\mathrm{F}\left(N\right)$ Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach N Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$[\mathrm{F}]$ Zählwert in Fehlern.

$N_1 = 100$, $N_2 = 10^4$, $FC_\mathrm{M} = 90\%$, $c_\mathrm{MF} = \bar{\zeta}/\bar{\zeta}_\mathrm{M} = 0{,}5$,
$\#F\left(N_1\right) - \#F\left(N_2\right) = 100$

c) *Zu erwartende MF-Rate nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

$$\zeta_\mathrm{F}\left(N\right) = \frac{\mu_\mathrm{F}(N)\cdot K}{N} \tag{1.60}$$

Mit dem Formfaktor aus Aufgabenteil a und der zu erwartenden Fehleranzahl aus Aufgabenteil b:

$$\zeta_\mathrm{F}\left(N_1\right) = \frac{0{,}5\cdot 111}{10^2} = 5{,}56\cdot 10^{-1}\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$
$$\zeta_\mathrm{F}\left(N_2\right) = \frac{0{,}5\cdot 11{,}1}{10^4} = 5{,}56\cdot 10^{-4}\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$$

$\zeta_\mathrm{F}\left(N\right)$ Fehlfunktionsrate durch Fehler in Abhängigkeit von der Testanzahl.
$\left[\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{MF}}\right]$ Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

$N_1 = 100$, $N_2 = 10^4$, $FC_\mathrm{M} = 90\%$, $c_\mathrm{MF} = \bar{\zeta}/\bar{\zeta}_\mathrm{M} = 0{,}5$,
$\#F\,(N_1) - \#F\,(N_2) = 100$

d) *Wie viel Simulationszeit erfordert die Abschätzung der Fehlerüberdeckung für die effektive Testanzahl N_2, wenn die Fehlersimulation für einen Testschritt 1 s dauert?*

$$N_\mathrm{Sim} \approx c_\mathrm{MF} \cdot N \quad \text{mit} \quad c_\mathrm{MF} = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}_\mathrm{MF}} \tag{2.11}$$

Anzahl der zu simulierenden Tests:

$$N_\mathrm{Sim} = c_\mathrm{MF} \cdot N_2 = 5.000$$
$$t_\mathrm{Sim} = N_\mathrm{T} \cdot 1\,\mathrm{s} = 5.000\,\mathrm{s} = 1{,}4\,\mathrm{h}$$

N_Sim	Anzahl der zu simulierenden Tests.
c_MF	Fehlermodellspezifische Skalierung der effektiven Testanzahl.
t_Sim	Zeitaufwand der Fehlersimulation.

Zusammenfassung

Fehlernachweiswahrscheinlichkeit Zufallstest

- Fehlernachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Testanzahl N für Systeme ohne Gedächtnis für $\zeta_i \leq 0{,}1$:

$$p_i\left(N\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot N} \tag{2.9}$$

- Die MF-Rate ζ_i des Fehlers hängt dabei vom Operationsprofil ab. Wenn nichts gegenteiliges festgelegt, sei das Operationsprofil konstant und für den Test gleich dem im Einsatz.
- Die Beziehung gilt in der Regel auch für Systeme mit Gedächtnis, wenn die Anzahl der Tests $N \gg N_{\mathrm{I}}$ ist.

Fehler- und Modellfehlerüberdeckung

Gezielte Testsuche. Wenn sich für einen Modellfehler Tests finden lassen, Suche von insgesamt $w \geq 1$ Tests je Modellfehler:

$$p_i = 1 - \prod_{j=1}^{v_i} \left(1 - \left(FC_{\mathrm{M}} \cdot \left(1 - \left(1 - p_{ij}\right)^{w}\right)\right)\right) \tag{2.10}$$

- Erfordert ein Fehlermodell, das für jeden Fehler $v_i \geq 1$ Modellfehler generiert, deren Nachweis mit einer hohen Wahrscheinlichkeit p_{ij} den Nachweis von Fehler i impliziert.
- Die FC hängt mehr von der Anzahl der Tests w, die je Modellfehler gesucht werden, als von FC_{M} ab.

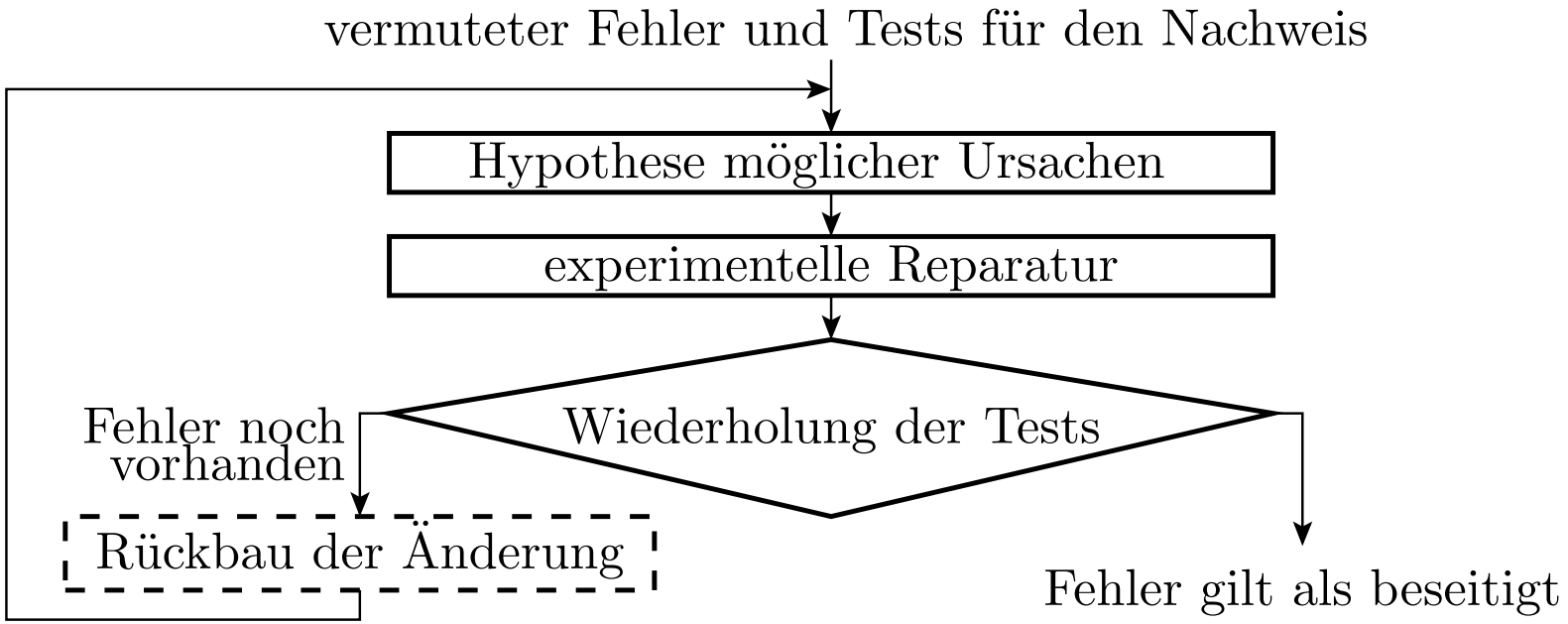
Zufallstest: Zu simulierende Testanzahl für zu erwartende Fehlerüberdeckung gleich Modellfehlerüberdeckung:

$$N_{\mathrm{Sim}} \approx c_{\mathrm{MF}} \cdot N \quad \text{mit} \quad c_{\mathrm{MF}} = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}_{\mathrm{MF}}} \tag{2.11}$$

- Verlangt vom Fehlermodell nur eine ähnliche Form der MF-Dichte.
- Erlaubt deutlich vertrauenswürdigere Abschätzungen, als wenn die Modellfehler auch für die Testsuche genutzt werden.

Fehlerbeseitigung

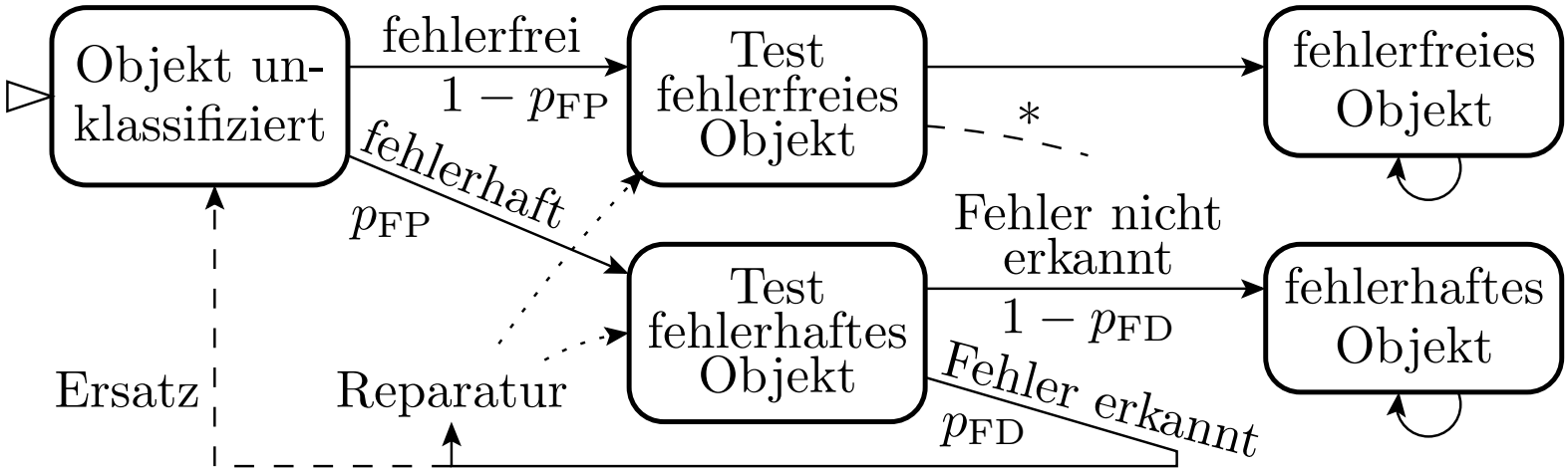
Experimentelle Reparatur (siehe Folie 1.114)



- Iteration aus Beseitigungsversuchen für hypothetische Fehler und Erfolgskontrolle durch Testwiederholung.
- Beseitigt alle vom Test nachweisbaren Fehler.
- Zur Vermeidung der Entstehung neuer Fehler bei der Reparatur Rückbau nach erfolglosen Reparaturversuchen.

Voraussetzung: deterministische Fehlerwirkung (siehe Abschn. 1.5.2).

Fehlerbeseitigung als Markov-Kette



Ein Fehler i

- ist mit einer Wahrscheinlichkeit p_{FP} vorhanden und
- wird mit einer Wahrscheinlichkeit p_{FD} erkannt.

Für die Fehlerbeseitigung sind zwei Ansätze zu unterscheiden:

- Ersatz Gesamtsystem,
- Reparatur z.B. durch Ersatz fehlerhafter Teilsysteme.

---

p_{FP} Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler vorhanden (present) ist.

p_{FD} Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).

$*$ Zusatzkante für Phantomfehler von *Test fehlerfreies Objekt* zu *Reparatur oder Ersatz*.

Ersatz oder Reparatur

Beim Ersatz erkannter defekter Systeme vor dem Einsatz aus demselben Fertigungsprozess

- haben Orginal- und Ersatzteile dieselbe Ausbeute Y und
- muss das Originalteil im Mittel μ_R mal ersetzt werden:

$$\mu_\mathrm{R} = \frac{1}{Y} - 1 \tag{12}$$

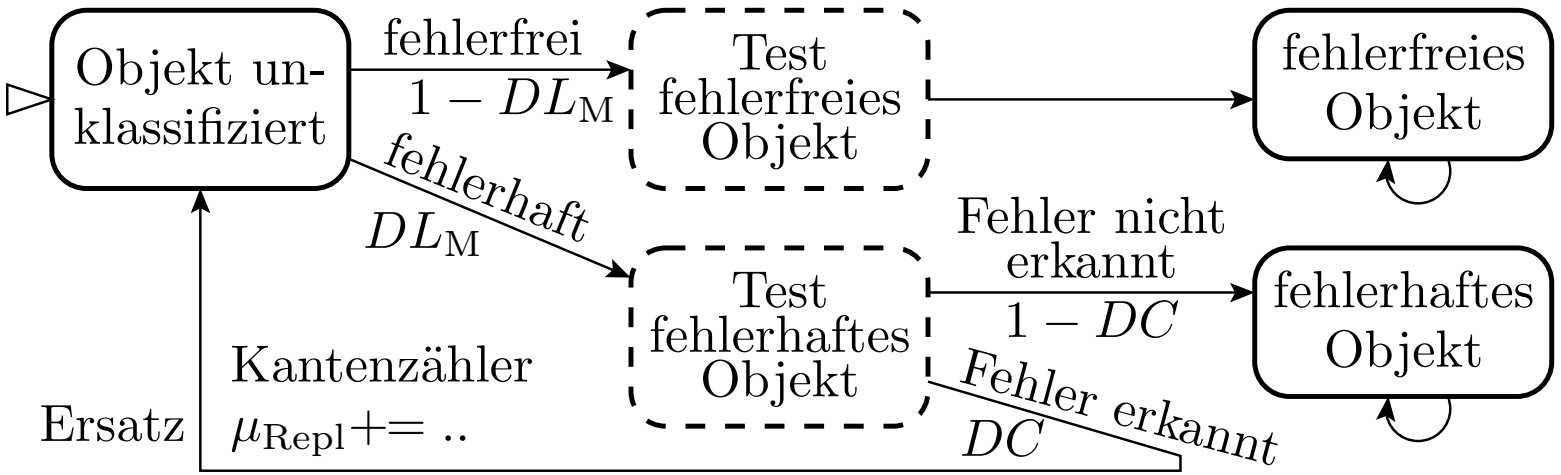
Aus diesem modellhaften Überschlag leitet sich ab, dass die Fertigungskosten pro verkauftes System $\approx \frac{1}{Y}$ mal so hoch wie die Kosten für die Fertigung eines einzelnen Systems sind. Dafür spart Ersatz die Aufwändungen für prüf- und reparaturgerechten Entwurf, Lokalisierung und Vorratshaltung von Reparaturkapazitäten.

Ersatz ist die kostengünstigste Art der Fehlerbeseitigung bei hoher Ausbeute und unbezahlbar für Ausbeuten $Y \ll 50\%$.

μ_Repl Zu erwartende Anzahl der Ersetzungen.
Y Ausbeute (Yield).

Ersatz

Fehlerbeseitigung durch Ersatz



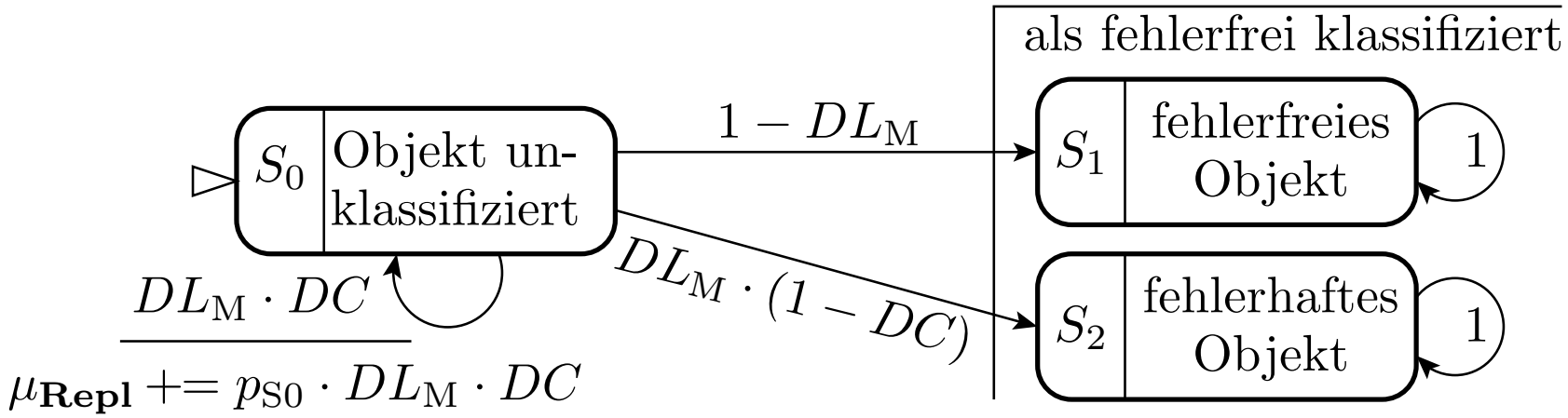
Original- und Ersatzobjekte sind mit Wahrscheinlichkeit DL_{M} defekt.

Je Schritt wird aus unklassifizierten Objekten mit Wahrscheinlichkeit

- $1 - DL_{\mathrm{M}}$ ein fehlerfreies Objekt oder
- $DL_{\mathrm{M}} \cdot (1 - DC)$ ein nicht erkanntes defektes Objekt,
- sonst wird es ersetzt und ist damit wieder unklassifiziert.

DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.
DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
μ_{Repl}	Kantenzähler für die zu erwartende Anzahl der Ersetzungen.

Vereinfachte Markov-Kette



Nach Ersatz aller erkennbar defekten Objekte:

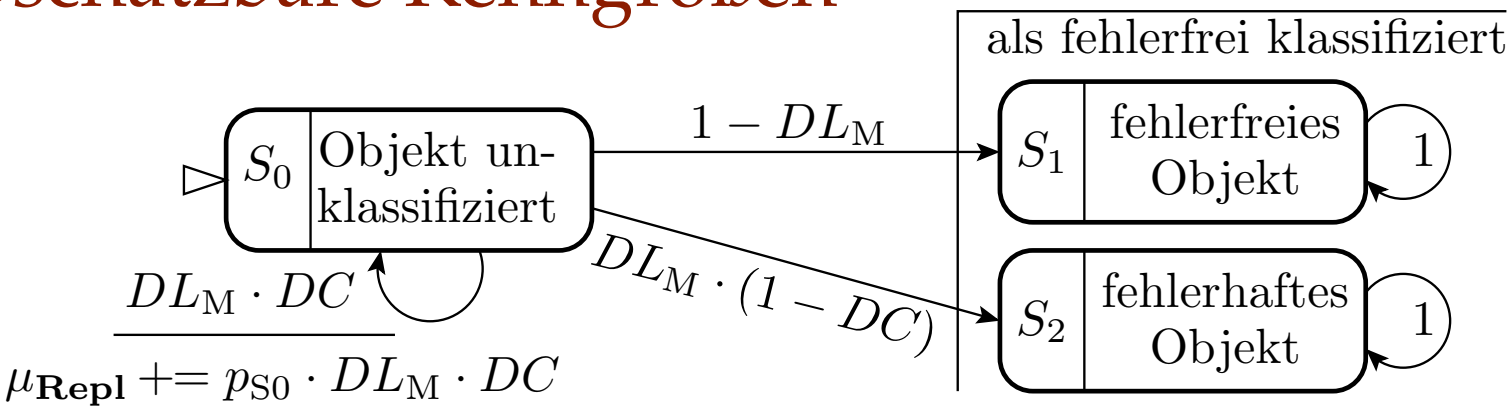
$$\lim_{\#Repl\to\infty}(p_{\mathrm{S0}}) = \lim_{\#Repl\to\infty}(DL_{\mathrm{M}} \cdot DC)^{\#Repl} = 0$$

$$\lim_{\#Repl\to\infty}(p_{\mathrm{S1}}) = (1 - DL_{\mathrm{M}}) \cdot \sum_{\#Repl=0}^{\infty}(DL_{\mathrm{M}} \cdot DC)^{\#Repl} = \frac{1-DL_{\mathrm{M}}}{1-DL_{\mathrm{M}}\cdot DC} \quad \text{(SGS)}$$

$$\lim_{\#Repl\to\infty}(p_{\mathrm{S2}}) = 1 - \lim_{\#Repl\to\infty}(p_{\mathrm{S1}}) = 1 - \frac{1-DL_{\mathrm{M}}}{1-DL_{\mathrm{M}}\cdot DC} = \frac{DL_{\mathrm{M}}\cdot(1-DC)}{1-DL_{\mathrm{M}}\cdot DC}$$

SGS	Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$.
DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.
$\#Repl$	Anzahl der Ersetzungen.

Abschätzbare Kenngrößen

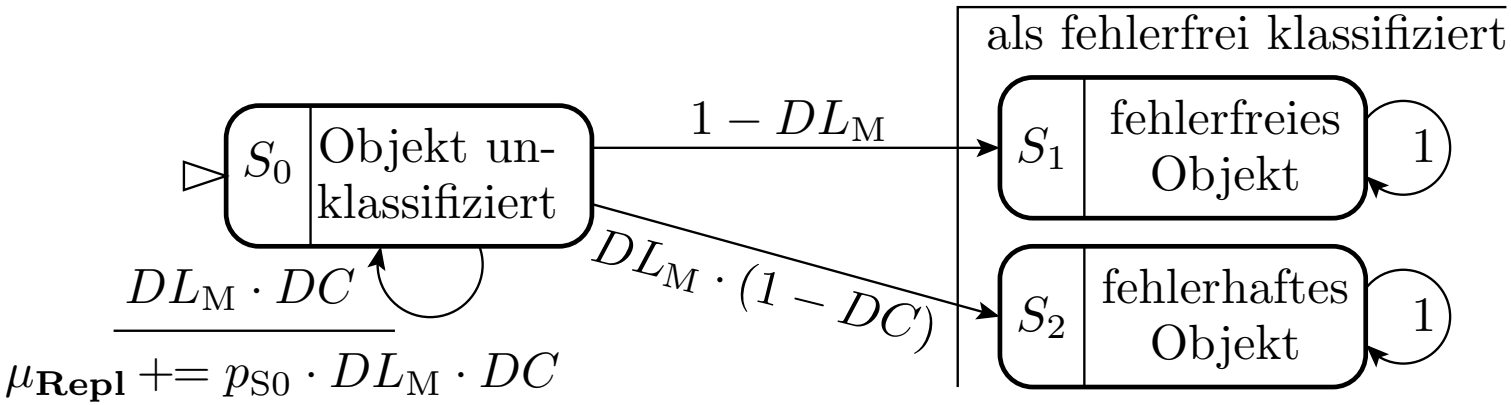


Defektanteil nach Aussortieren als Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerfrei ausgewiesenes Objekt fehlerhaft ist ist $\lim_{\#Repl \to \infty} (p_{\mathrm{S2}})$:

$$DL = \frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot (1 - DC)}{1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} \tag{1.85}$$

und wurde auf Foliensatz 1 durch Subtraktion der Anzahl der erkannten defekten Produkte von der Anzahl der defekten und aller Produkte in Zähler und Nenner hergeleitet (siehe Folie 1.175 *Defektanteil nach Ersatz*).

DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.
DL	Defektanteil nach Ersatz der Produkte mit erkannten Fehlern.



Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Objekt nicht ersetzt wird:

$$p_{\mathrm{NR}} = \frac{DL}{DL_{\mathrm{M}}} = \frac{\frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot (1-DC)}{1-DL_{\mathrm{M}} \cdot DC}}{DL_{\mathrm{M}}} = \frac{(1-DC)}{1-DL_{\mathrm{M}} \cdot DC}$$

Zu erwartende Anzahl der Ersetzungen je als gut befundenes Objekt:

$$\mu_{\mathrm{Repl}} = \sum_{\#Repl=1}^{\infty} (DL \cdot DC)^{\#Repl} = \frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot DC}{1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} \qquad (13)$$

Die zu erwartende Anzahl der je als gut befundenen Objekte zu herzustellenden Objekte ist um eins größer als μ_{Repl} und gleich dem Kehrwert der Ausbeute (vergl. Gl. 2.12):

$$Y = \frac{1}{\mu_{\mathrm{Repl}} + 1} = \frac{1}{\frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot DC}{1-DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} + 1} = 1 - DL \cdot DC \surd$$

Beispiel 2.6: Ausbeute und Defektanteil nach Ersatz

Schaltkreisausbeuten Y: 10%, 30%, 50%, 80% und 90%, Defektüberdeckung DC: 90%, 99%, 99,5% und 99,9%.

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der Ersetzungen μ_{Repl}, bis ein Schaltkreis durch den Test kommt?*

b) *Wie groß ist der Defektanteil DL_{M} der Schaltkreise nach der Fertigung vor dem Aussortieren?*

c) *Wie groß ist der Defektanteil DL nach Aussortieren (Ersatz) der erkannten fehlerhaften Schaltkreise in Abhängigkeit von der Ausbeute und der Defektüberdeckung?*

Y	Ausbeute (Yield).
DC	Defektüberdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
μ_{Repl}	Zu erwartende Anzahl der Ersetzungen.
DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.
DL	Defektanteil nach Ersatz der Produkte mit erkannten Fehlern.

Schaltkreisausbeuten Y: 10%, 30%, 50%, 80% und 90%, Defektüberdeckung DC: 90%, 99%, 99,5% und 99,9%.

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der Ersetzungen μ_{Repl}, bis ein Schaltkreis durch den Test kommt?*

$$\mu_{\mathrm{Repl}} = \frac{1}{Y} - 1 \tag{2.12}$$

Zu erwartende Anzahl der Ersetzungen je guter Schaltkreis:

Y	10%	30%	50%	80%	90%
$\mu_{\mathrm{Repl}} = \frac{1}{Y} - 1$	9	2,33	1	0,25	0,11

Schaltkreisausbeuten Y: 10%, 30%, 50%, 80% und 90%, Defektüberdeckung DC: 90%, 99%, 99,5% und 99,9%.

b) *Wie groß ist der Defektanteil DL_{M} der Schaltkreise nach der Fertigung vor dem Aussortieren?*

$$Y = 1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC \tag{1.84}$$

Umstellung nach dem Defektanteil DL_{M} vor Ersatz erkannter defekter Teile:

$DL_{\mathrm{M}} = \frac{1-Y}{DC}$	$Y = 10\%$	...=30%	...=50%	...=80%	...=90%
90%	100,0%	77,8%	55,6%	22,2%	11,1%
99%	90,9%	70,7%	50,50%	20,2%	10,1%
99,9%	90,1%	70,1%	50,1%	20,0%	10,0%

Für $Y = 1 - DC$ sind alle gefertigten Schaltkreise defekt und $Y < 1 - DC$ ist nach Gl. 1.84 nicht möglich.

Schaltkreisausbeuten Y: 10%, 30%, 50%, 80% und 90%, Defektüberdeckung DC: 90%, 99%, 99,5% und 99,9%.

c) *Wie groß ist der Defektanteil DL nach Aussortieren (Ersatz) der erkannten fehlerhaften Schaltkreise in Abhängigkeit von der Ausbeute und der Defektüberdeckung?*

$$DL = \frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot (1-DC)}{1-DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} \tag{1.85}$$

$$DL_{\mathrm{M}} = \frac{1-Y}{DC}; \quad DL = \frac{\frac{1-Y}{DC} \cdot (1-DC)}{1-\frac{1-Y}{DC} \cdot DC} = \frac{(1-Y) \cdot (1-DC)}{Y \cdot DC}$$

DC	90%	99%	99,5%	99,9%
$Y = 10\%$	100%	9,09%	4,52%	9009 dpm
$Y = 30\%$	25,9%	2,36%	1,17%	23368 dpm
$Y = 50\%$	11,1%	1,01%	5025 dpm	1001 dpm
$Y = 80\%$	2,78%	2525 dpm	1256 dpm	250 dpm
$Y = 90\%$	1,23%	1122 dpm	558 dpm	111 dpm

dpm Anzahl der defekten Objekte von einer Million (defecs per million).

Schaltkreisausbeuten Y: 10%, 30%, 50%, 80% und 90%, Defektüberdeckung DC: 90%, 99%, 99,5% und 99,9%.

$$DL_{\mathrm{M}} = \frac{1-Y}{DC}; \quad DL = \frac{\frac{1-Y}{DC}\cdot(1-DC)}{1-\frac{1-Y}{DC}\cdot DC} = \frac{(1-Y)\cdot(1-DC)}{Y\cdot DC}$$

DC	90%	99%	$99,5\%$	$99{,}9\%$
$Y = 10\%$	100%	9,09%	4,52%	9009 dpm
$Y = 30\%$	25,9%	2,36%	1,17%	23368 dpm
$Y = 50\%$	11,1%	1,01%	5025 dpm	1001 dpm
$Y = 80\%$	2,78%	2525 dpm	1256 dpm	250 dpm
$Y = 90\%$	1,23%	1122 dpm	558 dpm	111 dpm

Für den Defektanteil getesteter Schaltkreise DL findet man in der Literatur die Größenordnung 100 ... 1000 dpm. Für $Y = 30\%..80\%$ folgen daraus Defektüberdeckungen von $DC \approx 99{,}9\%$.

- Sind die Defektüberdeckungen wirklich so hoch oder
- sind die Literaturangaben zum Defektanteil zu niedrig?

Diese Frage wird uns weiter begleiten.

Reparatur

Fehlerbeseitigung durch Reparatur

Bei einer Reparatur werden nur die als defekt diagnostizierten Teile getauscht oder modifiziert. Zu ersetzende Teilsysteme:

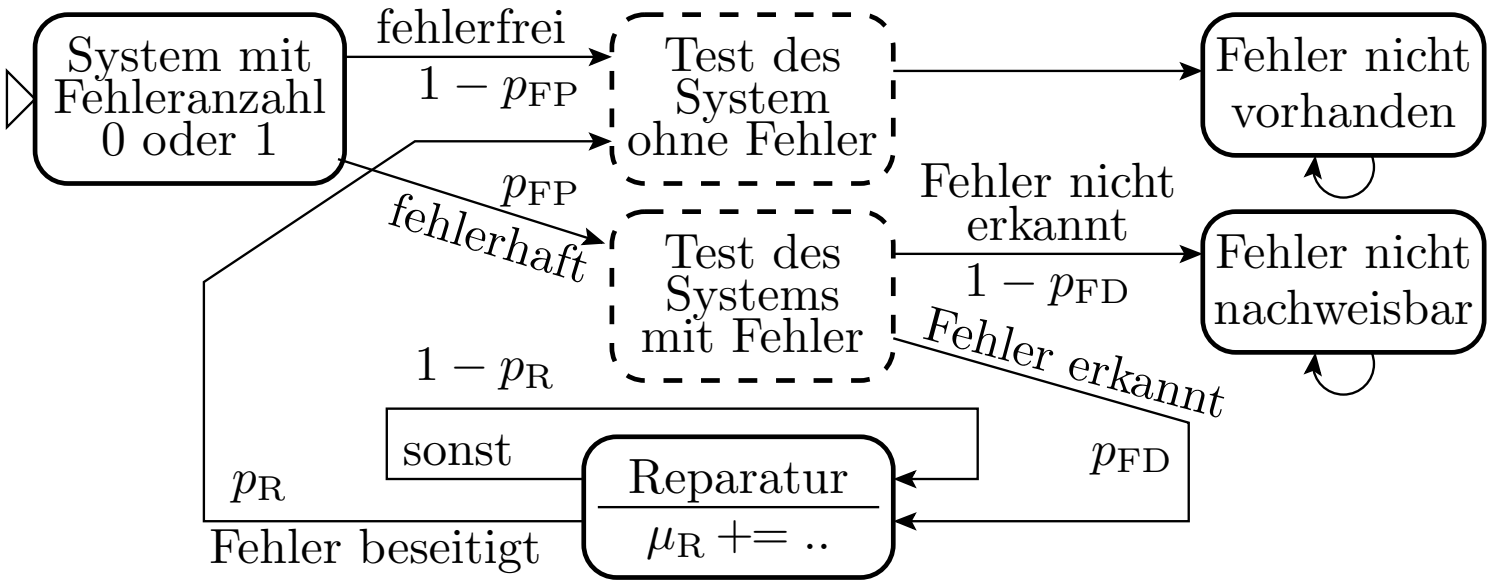
- sind billiger als zu ersetzende Gesamtsysteme und
- haben einen kleineren Defektanteil (weniger Mehrfachersetzungen).

Dafür verlangt Reparatur Zusatzaufwändungen:

- Reparaturgerechter Entwurf (modulare Austauschbarkeit),
- Fehlerlokalisierung und
- Organisationseinheiten + Personalkapazität für Reparatur (bei Software für Wartung).

Bei hoher Ausbeute $Y \gg 50\%$ unrentabel.

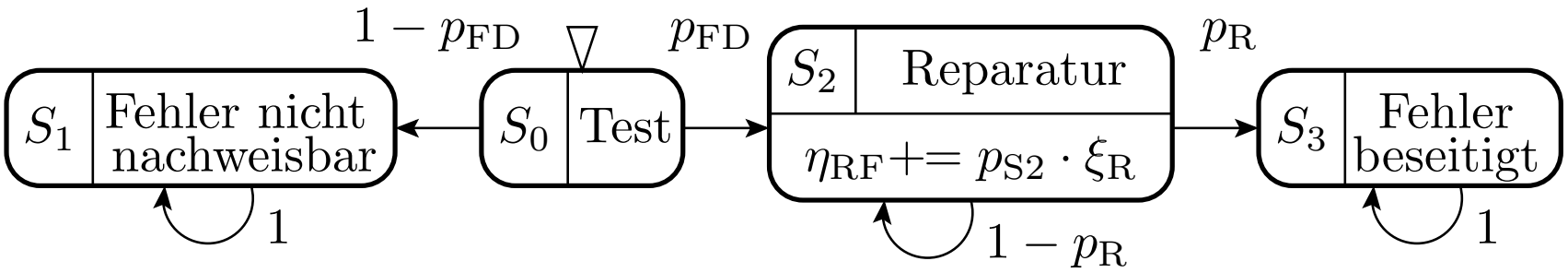
Beseitigungsiteration für einen Fehler



- Für einen erkannten Fehler wird solange repariert, bis das sichtbare Fehlverhalten beseitigt ist.
- Bei jedem Reparaturversuch entstehen mit geringer Wahrscheinlichkeit neue Fehler.

p_{FP}	Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler vorhanden (present) ist.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
p_R	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
μ_R	Zu erwartende Anzahl der Reparaturen bis zur Fehlerbeseitigung.

Verbesserte Markov-Kette je Fehler

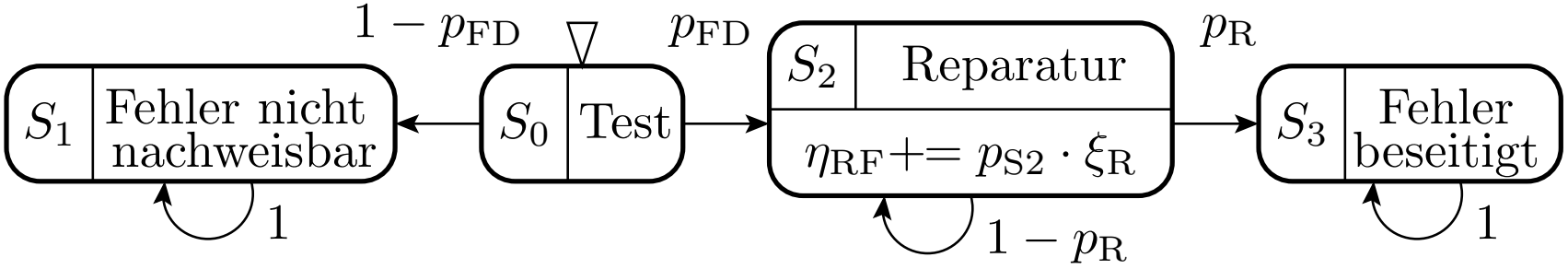


Die Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit eines vorhandenen Fehlers ist gleich der Erkennungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{FE}} = p_{\mathrm{S3}} = p_{\mathrm{FD}} \cdot p_{\mathrm{R}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p_{\mathrm{R}})^n = p_{\mathrm{FD}} \quad \text{(SGS)}$$

Alle erkennbaren Fehler werden beseitigt.

p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
$p_{\mathrm{S}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.
p_{FE}	Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit.
SGS	Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

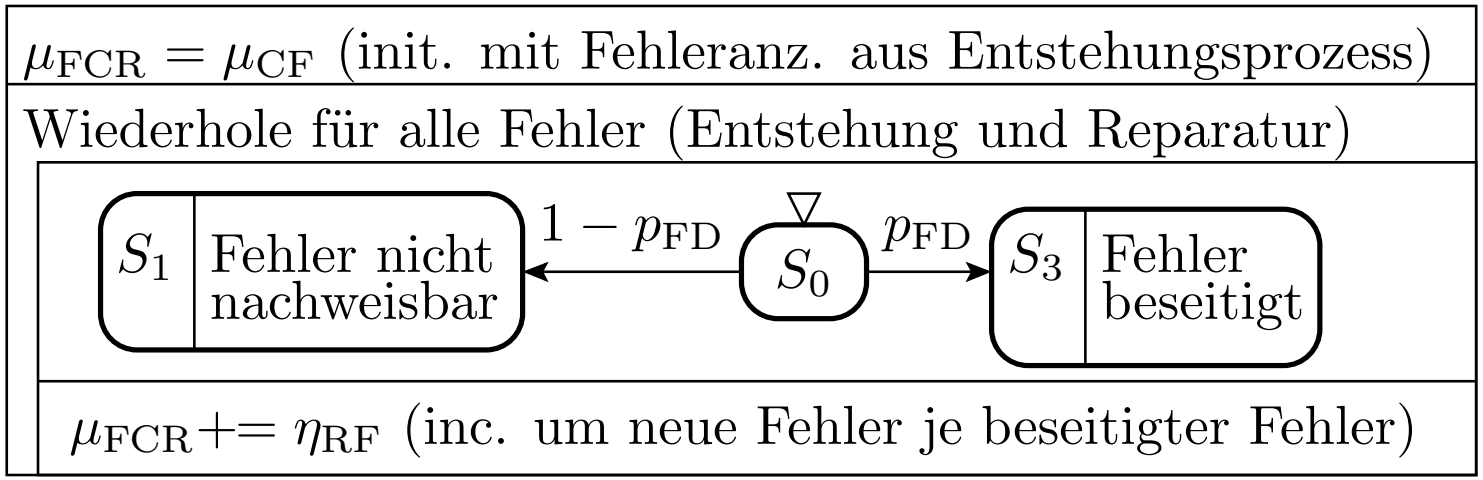


- Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je zu Beginn vorhandener Fehler*:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p_{\mathrm{R}})^n = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \quad \text{(SGS)} \qquad (14)$$

η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.
SGS	Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

Mehrere Fehler aus den Entstehungsprozessen



- Je eine Markov-Kette für jeden zu beseitigenden Fehler.
- Jeder erkennbare Fehler wird. beseitigt

Gesamtanzahl der entstehenden Fehler für $\eta_{\mathrm{RR}} < 1$:

$$\mu_{\mathrm{FCR}} = \mu_{\mathrm{CF}} \cdot (1 + \eta_{\mathrm{RF}} \cdot (1 + \eta_{\mathrm{RF}} \cdot (1 + \ldots))) = \mu_{\mathrm{CP}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\eta_{\mathrm{RF}})^i$$

μ_{FCR}	Zu erwartende Fehleranzahl aus den Entstehungs- und Reparaturprozessen insgesamt.
μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.

Fortsetzung Folie zuvor ...

$$\mu_{\mathrm{FCR}} = \mu_{\mathrm{CF}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\eta_{\mathrm{RF}})^i = \frac{\mu_{\mathrm{CF}}}{1 - \eta_{\mathrm{RF}}}$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \mu_{\mathrm{FCR}} \cdot (1 - p_{\mathrm{FD}}) = \frac{(1 - p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{CF}}}{1 - \eta_{\mathrm{RF}}} \tag{15}$$

mit der zu erwartenden Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \tag{2.14}$$

μ_{FCR}	Zu erwartende Fehleranzahl aus den Entstehungs- und Reparaturprozessen insgesamt.
μ_{F}	zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.
p_{R}	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.

Fallunterscheidung nach der zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler μ_{RF}:

1. $\mu_{\mathrm{RF}} < 0{,}1$: Wunschfall, μ_{FNE} erhöht sich anteilmäßig um μ_{RF}:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})\cdot\mu_{\mathrm{CF}}\cdot(1+\mu_{\mathrm{RF}})}{(1-\mu_{\mathrm{RF}})\cdot(1+\mu_{\mathrm{RF}})} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})\cdot\mu_{\mathrm{CF}}\cdot(1+\mu_{\mathrm{RF}})}{1-\mu_{\mathrm{RF}}^2}$$
$$\approx (1-p_{\mathrm{FD}})\cdot\mu_{\mathrm{CF}}\cdot(1+\mu_{\mathrm{RF}})$$

2. $\mu_{\mathrm{RF}} = p_{\mathrm{FD}}$: Beseitigung aller erkennbaren Fehler, ohne dass sich die zu erwartende Fehleranzahl verringert:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}})\cdot\mu_{\mathrm{CF}}}{(1-\mu_{\mathrm{RF}})} = \mu_{\mathrm{CF}}$$

3. $1 > \mu_{\mathrm{RF}} > p_{\mathrm{FD}}$: Bei Beseitigung aller erkennbaren Fehler erhöht der Reparaturprozess die zu erwartende Fehleranzahl.
4. $\mu_{\mathrm{RF}} > 1$: Das Reparaturziel, die Beseitigung aller erkennbaren Fehler, ist nicht erreichbar.

Einen vernünftiger Reparaturprozess sollte $\mu_{\mathrm{RF}} < 0{,}1$ anstreben.

Gute studentische Programmierleistung

- Fehlerarme Programmierung, z.B. $\mu_{\mathrm{CF}} = 5$ (ohne Syntaxfehler).
- Gründlicher Test, z.B. $p_{\mathrm{FD}} = 50\%$ mit $N = 10$ Tests.
- Brauchbare Fehlerbeseitigung: 2 bis 3 Reparaturversuche je Fehler ($p_{\mathrm{R}} = 40\%$), ein neuer Fehler je 10 Reparaturversuche ($\xi_{\mathrm{R}} = 0{,}1$).
- Formfaktor der Verteilung der MF-Rate $K = 0{,}5$.

$$\begin{array}{lrlll}
\text{Gl. 2.14} & \eta_{\mathrm{RF}} & = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} & = \frac{50\% \cdot 0{,}1}{40\%} & = 0{,}12 \\
\text{Gl. 2.15} & \mu_{\mathrm{F}} & = \frac{(1-p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{FCP}}}{1-\mu_{\mathrm{FR}}} & = \frac{(1-50\%) \cdot 5}{1-0{,}12} & = 3{,}75 \\
\text{Gl. 1.60} & \zeta_{\mathrm{F}} & \approx \frac{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N)}{N} & = \frac{0{,}5 \cdot 3{,}75}{10} & = 0{,}1875
\end{array}$$

- Im Mittel 2,5 ursprüngliche plus 1,25 bei der Reparatur entstehende nicht erkennbare Fehler.
- Ein weiteres zufälliges Testbeispiel wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \zeta > 80\%$ korrekt abgearbeitet.

Für eine Studienleistung gut genug.

Schlechte Programmierleistung

- Mehr Entwurfsfehler: $\mu_{\mathrm{CF}} = 7$ Fehler (ohne Syntaxfehler).
- Weniger Tests: $p_{\mathrm{FD}} = 30\%$ mit $N = 5$ Tests.
- Im Mittel 3 bis 4 Reparaturversuche je Fehler ($p_{\mathrm{R}} = 30\%$) und wegen fehlendem Rückbau $\xi_{\mathrm{R}} = 0{,}5$.
- Formfaktor der Verteilung der MF-Rate $K = 0{,}5$:

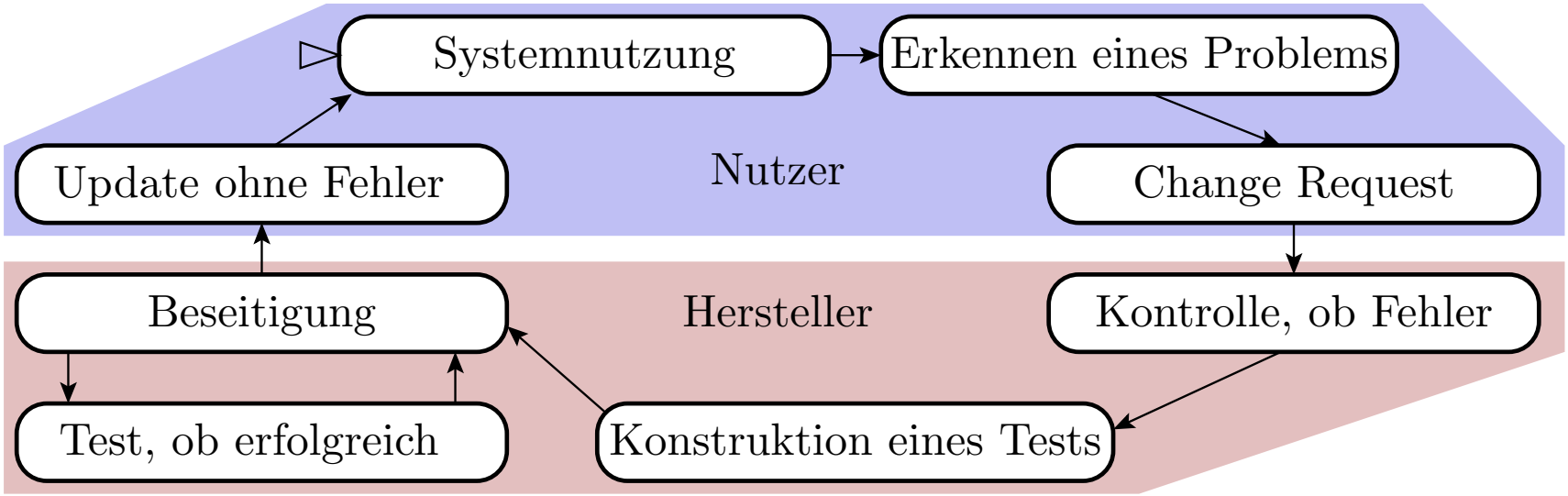
$$\begin{array}{lrcll} \text{Gl. 2.14} & \eta_{\mathrm{RF}} & = & \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} & = \frac{0{,}3 \cdot 50\%}{40\%} = 0{,}375 \\ \text{Gl. 2.15} & \mu_{\mathrm{F}} & = & \frac{(1-p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{CF}}}{1-\mu_{\mathrm{FR}}} & = \frac{(1-30\%) \cdot 7}{1-0{,}375} = 7{,}9 \\ \text{Gl. 1.60} & \zeta & \approx & \frac{K \cdot \mu_{\mathrm{F}}(N)}{N} & = \frac{0{,}5 \cdot 7{,}9}{5} = 0{,}8 \end{array}$$

- Im Mittel 4,9 ursprüngliche plus 2,9 bei der Reparatur entstehende nicht erkennbare Fehler.
- Ein weiteres zufälliges Testbeispiel wird nur mit Wahrscheinlichkeit von 20% korrekt abgearbeitet.

Wie Prüfung bestehen? Verdopplung der Testanzahl auf $N = 10$ Tests. Rückbau zur Halbierung von ξ_{R}. ...

Reifeprozesse

Fehlerbeseitigung in einem Reifeprozess



1. Bei einer vermuteten Fehlfunktion stellt der Nutzer eine Änderungsanforderung (Change Request). Alternativ sendet das System einer MF-Report. Vermutetet Fehler werden in Schubladen vermuteter gleicher Ursache gesammelt.
2. Der Hersteller bevorzugt bei der Beseitigung Schubladen, die Fehler mit häufigen schwerwiegenden MF vermuten lassen.
3. Suche von Tests, die die MFsbar nachweisen.
4. Experimentelle Reperatur. Installation von Updates.

Wiederholung Absch. 1.4.6 Reifeprozess

Bei Beobachtung einer MF werden die verursachenden Fehler nur mit einer Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{FE}} \ll 1$ beseitigt. Effektive Testanzahl:

$$N = p_{\mathrm{FE}} \cdot \#DS \tag{1.71}$$

Wenn bei der Beseitigung keine neuen Fehler entstehen bzw. neu entstandene Fehler vor Versionsfreigabe beseitigt werden:

$$\mu_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right) = \mu_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M0}}\right) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{-K} \tag{1.76}$$

$$\mu_{\mathrm{F}}\left(u_i\right) = \mu_{\mathrm{F}}\left(u_j\right) \cdot \left(\frac{u_i+u_{\mathrm{V0}}}{u_j+u_{\mathrm{V0}}}\right)^{-K} \tag{1.77}$$

$\mu_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right)$	Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Reifedauer.
$\mu_{\mathrm{F}}\left(u\right)$	zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Versionszahl.
t_{V0}	Equivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.
u_{V0}	Verhältnis equivalente Reifedauer vor Version null zum Versionsintervall.
t_{M}	Reifedauer (Maturing time).
u	Versionnummer des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.

Zunahme der fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right) = R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M0}}\right) \cdot \left(\frac{t_{\mathrm{M}}+t_{\mathrm{V0}}}{t_{\mathrm{M0}}+t_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{1.78}$$

$$R_{\mathrm{F}}\left(u_i\right) = R_{\mathrm{F}}\left(u_j\right) \cdot \left(\frac{u_i+u_{\mathrm{V0}}}{u_j+u_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{1.79}$$

Zuverlässigkeit und Sicherheit mit Fehlfunktionsbehandlungehandlung unter Vernachlässigung bzw. bei 100%-iger Korrektur von MF durch Störungen ($R = R_{\mathrm{F}}$):

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{R}{1-MC} \tag{1.32}$$

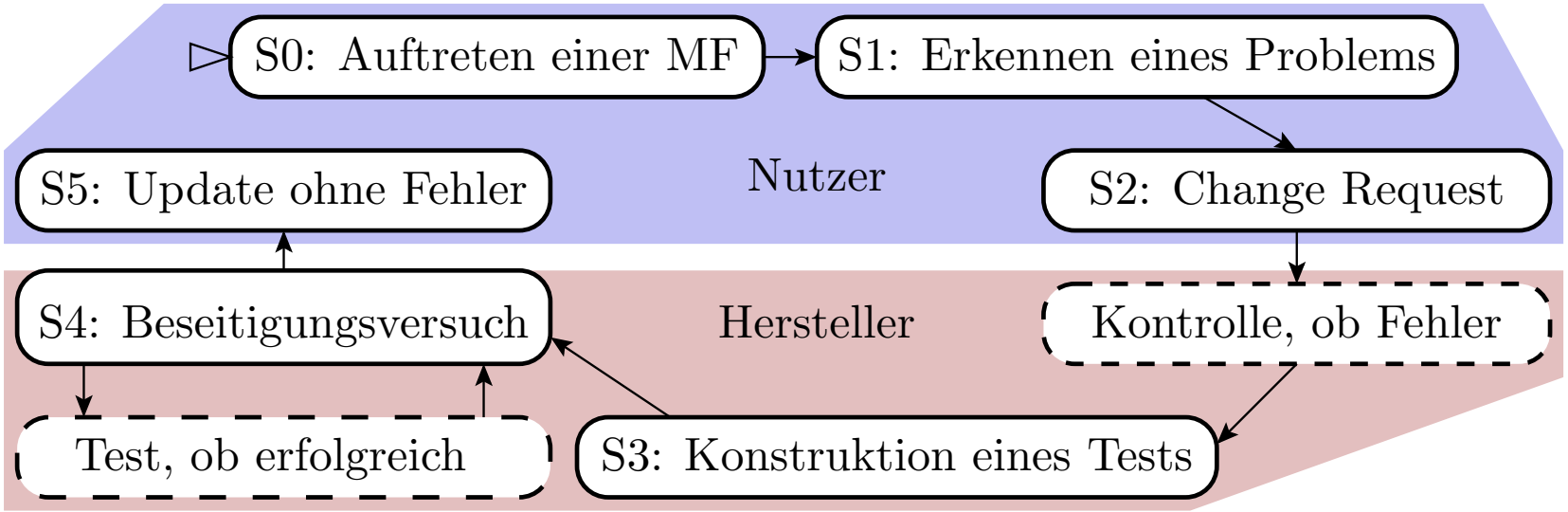
$$S_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MT}}}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.49}$$

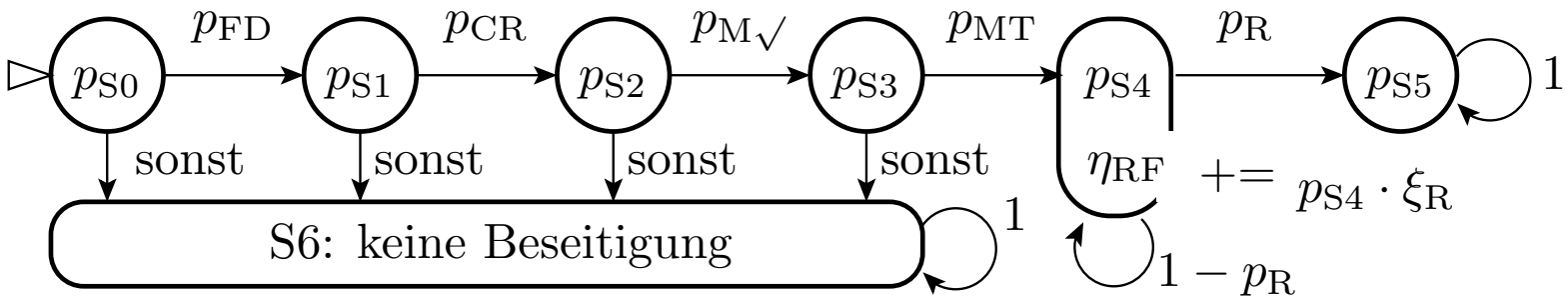
Fortsetzung / Modellerweiterung:

- Modellierung als Markov-Kette und
- Berücksichtigung neu entstehender Fehler.

$R_{\mathrm{F}}\left(t_{\mathrm{M}}\right)$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit in Abhängigkeit von der Reifedauer.
$R_{\mathrm{F}}\left(u\right)$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit in Abhängigkeit von der Versionszahl.
R_{MT}	Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung (Reliability with malfunction treatment).
MC	Fehlfunktionsüberdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.
S_{MT}	Sicherheit mit Fehlfunktionsbehandlung.
η_{SE}	Anteil der sicherheitsgefährdenden Fehlfunktionen.

Modellierung als Markov-Kette

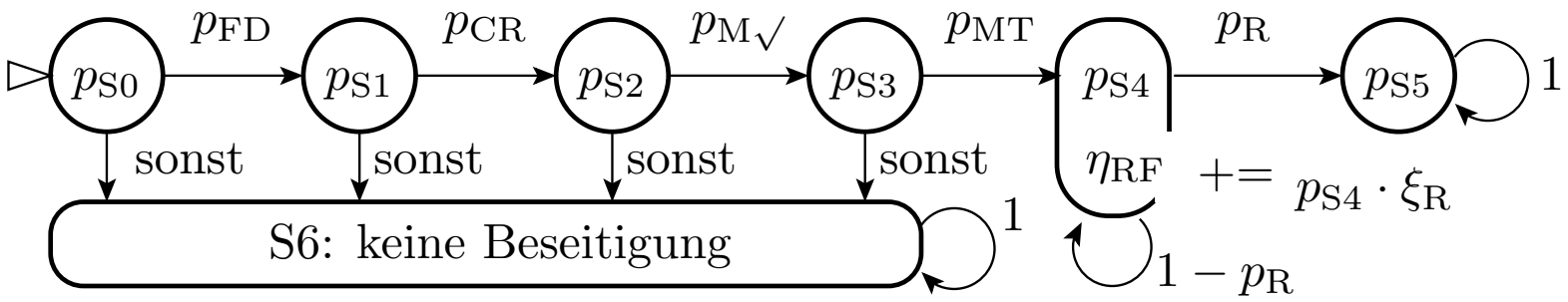




p_{Si} Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.

η_{RF} Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.

Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit



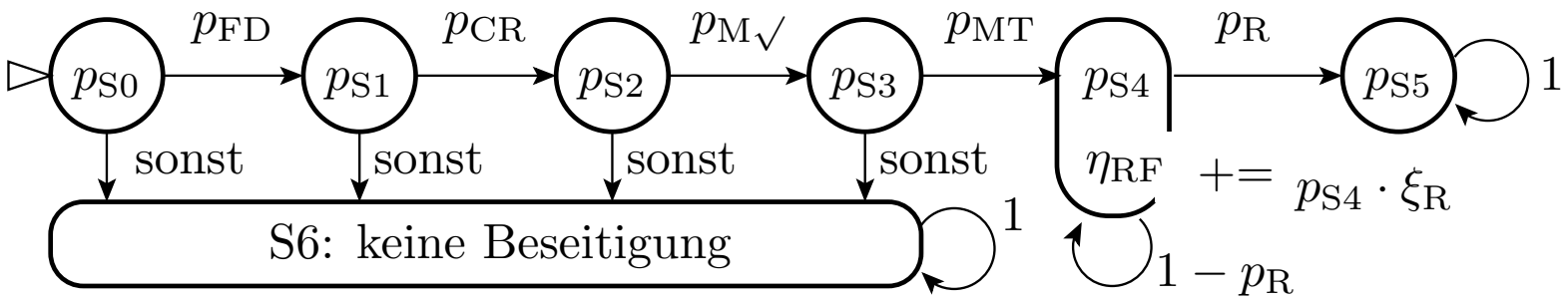
Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit bei Auftreten einer MF:

$$p_{\mathrm{FE}} = p_{\mathrm{FD}} \cdot p_{\mathrm{CR}} \cdot p_{\mathrm{M}\surd} \cdot p_{\mathrm{MT}} \tag{16}$$

Mit dem Kantenzähler μ_{FR} wird die zu erwartende Anzahl der Fehler abgeschätzt, die während des Reifeprozesses neu entstehen. Für bei der Reparatur entstandene Fehler zählt die Reifezeit ab Entstehung.

p_{FE}	Fehlerbeseitigungswahrsch., dass Fehler, wenn sie eine MF verursachen beseitigt werden.
p_{FD}	Fehlererkennungswahrscheinlichkeit (zu erwartende Fehlerüberdeckung).
p_{CR}	Wahrscheinlichkeit einer Änderungsanforderung (change request) bei beobachteter MF.
$p_{\mathrm{M}\surd}$	Wahrscheinlichkeit, dass der Hersteller (manufacturer) die MF rekonstruieren kann.
p_{MT}	Wahrscheinlichkeit, dass ein Test für den Fehlernachweis gefunden wird.

Neu entstehender Fehler je vorhandener Fehler



$$\eta_{\mathrm{RF}} = p_{\mathrm{FE}} \cdot \xi_{\mathrm{R}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p_{\mathrm{R}})^n = \frac{p_{\mathrm{FE}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \quad \text{(SGS)} \tag{17}$$

Bei der Beseitigung von jedem neu entstandenen Fehler entstehen wiederum im Mittel η_{FR} neue Fehler bei deren Beseitigung η_{FR} neue Fehler entstehen:

$$\eta_{\mathrm{RFR}} = \eta_{\mathrm{RF}} + \eta_{\mathrm{RF}}^2 + \eta_{\mathrm{RF}}^3 + \ldots = \frac{\eta_{\mathrm{RF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \quad \text{(SGS)} \tag{18}$$

η_{RF}	Erwartete Anzahl der bei der Reparatur entstehenden Fehler je ursprünglicher Fehler.
p_{FE}	Fehlerbeseitigungswahrsch., dass Fehler, wenn sie eine MF verursachen beseitigt werden.
ξ_{R}	Fehlerentstehungsrate in Fehlern je Reparaturversuch.
η_{RFR}	Neu entstehende Fehler je ursprünglicher Fehler rekursiv.
SGS	Summe einer geometrischen Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$.

Effekt. Testanz. für gleichlange Update-Intervalle

Die effektive Testanzahl in einem Reifeprozess ist das Produkt aus Reifedauer, der mittleren Anzahl der DS pro Zeit, der Nutzeranzahl und der Beseitigungswahrscheinlichkeit. Für gleichlange Update-Intervalle gilt abschätzungsweise:

$$N = \underbrace{p_{\mathrm{FE}} \cdot \mu_{\mathrm{NU}} \cdot \eta_{\mathrm{SU}} \cdot t_{\mathrm{VR}}}_{N_{\mathrm{MV}}} \cdot u + N_{\mathrm{T}} \tag{1.75}$$

Abnahme der Fehleranzahl mit der effektiven Testanzahl:

$$\mu_{\mathrm{F}}(N_2) = \mu_{\mathrm{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \tag{1.58}$$

$N_{[\mathrm{eff}]}$	Effektive Testanzahl, für die alle erkannten Fehler beseitigt werden.
p_{FE}	Fehlerbeseitigungswahrsch., dass Fehler, wenn sie eine MF verursachen beseitigt werden.
μ_{NU}	Zu erwartende Nutzeranzahl (Expected **n**umber of **u**ser).
η_{SU}	Mittlere Anzahl der **S**ervice-Leistungen pro Nutzer (**u**ser) und Nutzungszeit.
t_{VR}	Versionsintervall, Zeit zwischen der Freigabe aufeinanderfolgender Version.
u	Versionnummer des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...
N_{MV}	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
N_{T}	Effektive Testanzahl Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.

Fehlerentstehung und Beseitigung

Die erste und jede verbesserte Version wird erst nach Passieren aller N_{T} Herstellertests ohne MF freigegeben. Effektive Testsatzlänge in Version u für Fehler aus Version v:

$$N\left(u,v\right)=\left(u-v\right)\cdot N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}} \tag{19}$$

Die Nachweiswahrscheinlichkeit ab der Entstehungsversion v bis Nutzungsversion u ergibt sich aus der Verringerung der zu erwartenden Fehleranzahl in Gl. 1.58 mit Gl. 2.19:

$$p_{\mathrm{NE}}\left(u,v\right)=\left(\frac{\left(u-v\right)\cdot N_{\mathrm{MV}}+N_{\mathrm{T}}}{N_{\mathrm{T}}}\right)^{-K} \tag{20}$$

Die bereits in Version 0 vorhandenen Fehler $\mu_{\mathrm{F}}\left(0\right)$ sind in den Folgeversionen nur noch mit $p_{\mathrm{NE}}\left(u,0\right)$ vorhanden:

$$\mu_{\mathrm{F}}\left(u,0\right)=\mu_{\mathrm{F}}\left(0\right)\cdot p_{\mathrm{NE}}\left(u,0\right) \tag{21}$$

$u,\ v$	Versionnummern des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...
$n\left(u,v\right)$	Effektiven Testanzahl in Version u für Fehler aus Version v.
N_{MV}	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
N_{T}	Effektive Testanzahl Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.

In den Folgeversionen $v > 0$ kommt in der Nutzungsversion $u = v$ eine zur Anzahl der beseitigten Fehler proportionale Anzahl von bei der Beseitigung entstehenden Fehler hinzu, die sich in den Folgeversionen $u > v$ um $p_{\mathrm{NE}}(u, v)$ verringert:

$$\mu_{\mathrm{F}}(u, v) = \begin{cases} \underbrace{\eta_{\mathrm{RFR}} \cdot \sum_{v=0}^{u} \mu_{\mathrm{F}}(u, v) - \mu_{\mathrm{F}}(u-1, v)}_{\text{zu erwartende Anz. beseitigte Fehler}} & v = u > 0 \\ \mu_{\mathrm{F}}(u, u) \cdot p_{\mathrm{NE}}(u, v) & v > u \end{cases} \tag{22}$$

Zu erwartende Gesamtfehleranzahl jeder Version u:

$$\mu_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{v=0}^{u} \mu_{\mathrm{F}}(u, v) \tag{23}$$

$\mu_{\mathrm{F}}(u, v)$	Erwartete Anzahl Fehler, die in Version v entstanden und in Version u nicht beseitigt sind.
$u,\ v$	Versionnummern des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...
η_{RFR}	Neu entstehende Fehler je ursprünglicher Fehler rekursiv.
$p_{\mathrm{NE}}(u, v)$	Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler aus Version v in Version u nicht beseitigt sind.
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Versionszahl.

MF-Rate durch nicht beseitigte Fehler

Fehlfunktionsrate in Version u durch Fehler aus Versison v:

$$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v) = k \cdot \frac{\mu_{\mathrm{F}}(u,v)}{N(u,v)} \tag{24}$$

Gesamte Fehlfunktionsrate in Version u:

$$\zeta_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=0}^{u} \zeta_{\mathrm{F}}(u,v) \tag{25}$$

Zuverlässigkeit mit MF-Behandlungehandlung bei Korrektur oder Vernachlässigung der MF durch Störungen nach Gl. 1.32:

$$R_{\mathrm{MT}} = \frac{1}{\zeta_{\mathrm{F}} \cdot (1 - MC)}$$

$$S_{\mathrm{MT}} = \frac{R_{\mathrm{MT}}}{\eta_{\mathrm{SE}}} \tag{1.49}$$

$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$	MF-Rate in Version u verursacht von Fehlern die in Version v entstanden sind.
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	Gesamte Fehlfunktionsrate in Version u.
$R_{\mathrm{F}}(u)$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit in Abhängigkeit von der Versionszahl.
R_{MT}	Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung (Reliability with malfunction treatment).
S_{MT}	Sicherheit mit Fehlfunktionsbehandlung.

Beispiel 2.7: Reifeprozess mit neu entstehenden Fehlern

Parameter: $\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

a) *Zu erwartende Fehleranzahlen $\mu_{\mathrm{F}}(u, v)$ für $u = 0$ bis 5 gereifte Versionen je Entstehungsversion v und insgesamt?*

b) *MF-Raten Version u durch Fehler aus Version v und Summe?*

c) *Relative Erhöhung der zu erwartenden Fehleranzahl durch die bei der Beseitigung neu entstehenden Fehler?*

d) *Relative Erhöhung der MF-Rate durch die neu entstehenden Fehler?*

$\mu_{\mathrm{F}}(0)$	Erwartete Anzahl Fehler in Version 0 (erste freigegebene Version).
N_{T}	Effektive Testanzahl Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.
N_{MV}	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
η_{RFR}	Neu entstehende Fehler je ursprünglicher Fehler rekursiv.
K	Formfaktor der Verteilung der Fehlfunktionsrate $(0 < K < 1)$.
u, v	Versionnummern des reifenden Objekts, Zählweis 0, 1, 2, ...

Parameter: $\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

a) *Zu erwartende Fehleranzahlen $\mu_{\mathrm{F}}(u, v)$ für $u = 0$ bis 5 gereifte Versionen je Entstehungsversion v und insgesamt?*

Tabelle $\mu_{\mathrm{F}}(u, v)$ und $\mu_{\mathrm{F}}(u)$ für Version 1 bis 5:

u	0	1	2	3	4	5
$v = 0$	100	38,32	29,59	25,32	22,64	20,75
$v = 1$	0	6,17	2,36	1,82	1,56	1,40
$v = 2$	0	0	1,25	$4{,}80 \cdot 10^{-1}$	$3{,}71 \cdot 10^{-1}$	$3{,}17 \cdot 10^{-1}$
$v = 3$	0	0	0	$5{,}58 \cdot 10^{-1}$	$2{,}14 \cdot 10^{-1}$	$1{,}65 \cdot 10^{-1}$
$v = 4$	0	0	0	0	$3{,}40 \cdot 10^{-1}$	$1{,}30 \cdot 10^{-1}$
$v = 5$	0	0	0	0	0	$2{,}37 \cdot 10^{-1}$
$\mu_{\mathrm{F}}(u)$	100	44,49	33,21	28,18	25,13	22,99

$\mu_{\mathrm{F}}(u, v)$ Erwartete Anzahl Fehler, die in Version v entstanden und in Version u nicht beseitigt sind.

$\mu_{\mathrm{F}}(u)$ zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Versionszahl.

Parameter: $\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

b) *MF-Raten Version u durch Fehler aus Version v und Summe?*

$$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v) = k \cdot \frac{\mu_{\mathrm{F}}(u,v)}{n_{\mathrm{u}}(u,v)} \quad (2.24)$$

$$\zeta_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=0}^{u} \zeta_{\mathrm{F}}(u,v) \quad (2.25)$$

u	0	1	2	3	4	5
$v=0$	$4\cdot10^{-4}$	$1{,}39\cdot10^{-5}$	$5{,}64\cdot10^{-6}$	$3{,}27\cdot10^{-6}$	$2{,}21\cdot10^{-6}$	$1{,}63\cdot10^{-6}$
$v=1$	0	$2{,}47\cdot10^{-5}$	$8{,}59\cdot10^{-7}$	$3{,}48\cdot10^{-7}$	$2{,}02\cdot10^{-7}$	$1{,}36\cdot10^{-7}$
$v=2$	0	0	$5{,}02\cdot10^{-6}$	$1{,}75\cdot10^{-7}$	$7{,}07\cdot10^{-8}$	$4{,}10\cdot10^{-8}$
$v=3$	0	0	0	$2{,}23\cdot10^{-6}$	$7{,}78\cdot10^{-8}$	$3{,}14\cdot10^{-8}$
$v=4$	0	0	0	0	$1{,}36\cdot10^{-6}$	$4{,}73\cdot10^{-8}$
$v=5$	0	0	0	0	0	$9{,}48\cdot10^{-7}$
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$	$4\cdot10^{-4}$	$3{,}86\cdot10^{-5}$	$1{,}15\cdot10^{-5}$	$6{,}02\cdot10^{-6}$	$3{,}92\cdot10^{-6}$	$2{,}83\cdot10^{-6}$

$\zeta_{\mathrm{F}}(u,v)$ MF-Rate in Version u verursacht von Fehlern die in Version v entstanden sind.
$\zeta_{\mathrm{F}}(u)$ Gesamte Fehlfunktionsrate in Version u.

Parameter: $\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

c) *Relative Erhöhung der zu erwartenden Fehleranzahl durch die bei der Beseitigung neu entstehenden Fehler?*

u	1	2	3	4	5
$\frac{\mu_{\mathrm{F}}(u)}{\mu_{\mathrm{F}}(u,0)}$	1,161	1,122	1,113	1,110	1,108

Die Erhöhung setzt sich zusammen aus

- $\eta_{\mathrm{RFR}} = 10\%$ der gegenüber der Vorversion beseitigten Fehler plus
- $((u-v)\cdot 0{,}1)^{0.4}$ der $u-v$ Versionen vorher entstandenen Fehler

und ist nicht viel größer als η_{RFR}.

$\mu_{\mathrm{F}}(u,0)$ Zu erwartende Fehleranzahl aus Version 0, die in Version u nicht beseitigt sind.

Parameter: $\mu_{\mathrm{F}}(0) = 100$, $N_{\mathrm{T}} = 10^5$, $N_{\mathrm{MV}} = 10^6$, $\eta_{\mathrm{RFR}} = 0{,}1$, $K = 0{,}4$.

d) *Relative Erhöhung der MF-Rate durch die neu entstehenden Fehler?*

Relative Erhöhung der MF-Rate durch die neu entstehende Fehler:

u	1	2	3	4	5
$\frac{\zeta_{\mathrm{F}}(u)}{\zeta_{\mathrm{F}}(u,0)}$	2,78	2,04	1,84	1,77	1,74

Die effektive Testanzahl der $\eta_{\mathrm{RFR}} = 10\%$ der gegenüber der Vorversion beseitigten Fehler, die in jeder Version neu entstehen, hat nur eine effektive Testanzahl von $< 0{,}1$ der effektiven Testanzahl der Fehler, die eine Version älter sind. Diese Fehler geht entsprechend mit mehr als Faktor 10 in die Erhöhung der MF-Rate ein.

$\zeta_{\mathrm{F}}(u, 0)$ MF-Rate in Version u durch Fehlern aus Version 0 (erste freigegebene Version).

Zusammenfassung

Ersatz, Reparatur

Bei einer Fehlerbeseitigung mit Erfolgskontrolle werden alle erkennbaren Fehler beseitigt.

Fehlerbeseitigung durch Ersatz:

- Erwartete Anzahl der Ersetzungen je als gut befundenes Objekt:

$$\mu_{\mathrm{Repl}} = \frac{1}{Y} - 1 \tag{2.12}$$

- Defektanteil nach Ersatz erkannter defekten Geräte wie bisher:

$$DL = \frac{DL_{\mathrm{M}} \cdot (1 - DC)}{1 - DL_{\mathrm{M}} \cdot DC} \tag{1.85}$$

Fehlerbeseitigung durch Reparatur:

- Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je zu Beginn vorhandener Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FD}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \tag{2.14}$$

- Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler:

$$\mu_{\mathrm{F}} = \frac{(1 - p_{\mathrm{FD}}) \cdot \mu_{\mathrm{CF}}}{1 - \eta_{\mathrm{RF}}} \tag{2.15}$$

2.3.3 Reifeprozess

Ableitung aus der Modellierung durch eine Markov-Kette:

- Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{FE}} = p_{\mathrm{FD}} \cdot p_{\mathrm{CR}} \cdot p_{\mathrm{M}\surd} \cdot p_{\mathrm{MT}} \tag{2.16}$$

- Erwartete Anzahl neu entstehender Fehler je vorhandener Fehler:

$$\eta_{\mathrm{RF}} = \frac{p_{\mathrm{FE}} \cdot \xi_{\mathrm{R}}}{p_{\mathrm{R}}} \tag{2.17}$$

- und rekursiv bei der Beseitigung neu entstandener Fehler

$$\eta_{\mathrm{RFR}} = \frac{\eta_{\mathrm{RF}}}{1-\eta_{\mathrm{RF}}} \tag{2.18}$$

Für einen Reifeprozess, bei dem bei der Beseitigung eines Fehlers im Mittel $\eta_{\mathrm{RFR}} \ll 1$ neue Fehler entstehen, wurde ein Algorithmus hergeleitet für die Abschätzung der Abnahme

- der zu erwartenden Fehleranzahl und
- der durch Fehler verursachten MF-Rate.

Die Beispielrechnung hat gezeigt:

- Erhöhung der zu erwartende Fehlernzahl nur etwa um $\approx \eta_{\mathrm{RFR}}$ gegenüber »ohne Fehlerneuentstehung bei der Beseitigung«

$$\mu_{\mathrm{F}}\left(u_i\right) = \mu_{\mathrm{F}}\left(u_j\right) \cdot \left(\frac{u_i + u_{\mathrm{V0}}}{u_j + u_{\mathrm{V0}}}\right)^{-K} \tag{1.77}$$

- Deutlich stärkere Erhöhung der MF-Rate wegen der kürzeren effektiven Testsatzlängen für Fehler, die erst später bei Fehlerbesitigungsversuchen entstehen. Mit dem Beispielwerten ergab sich nur die halbe Zuverlässigkeit gegenüber »ohne Fehlerneuentstehung bei der Beseitigung«

$$R_{\mathrm{F}}\left(u_i\right) = R_{\mathrm{F}}\left(u_j\right) \cdot \left(\frac{u_i + u_{\mathrm{V0}}}{u_j + u_{\mathrm{V0}}}\right)^{K+1} \tag{1.79}$$

Fehlerentstehung

Abschätzung der zu erwartenden Fehleranzahl

- Einfaches Abschätzungsmodell über Metriken:

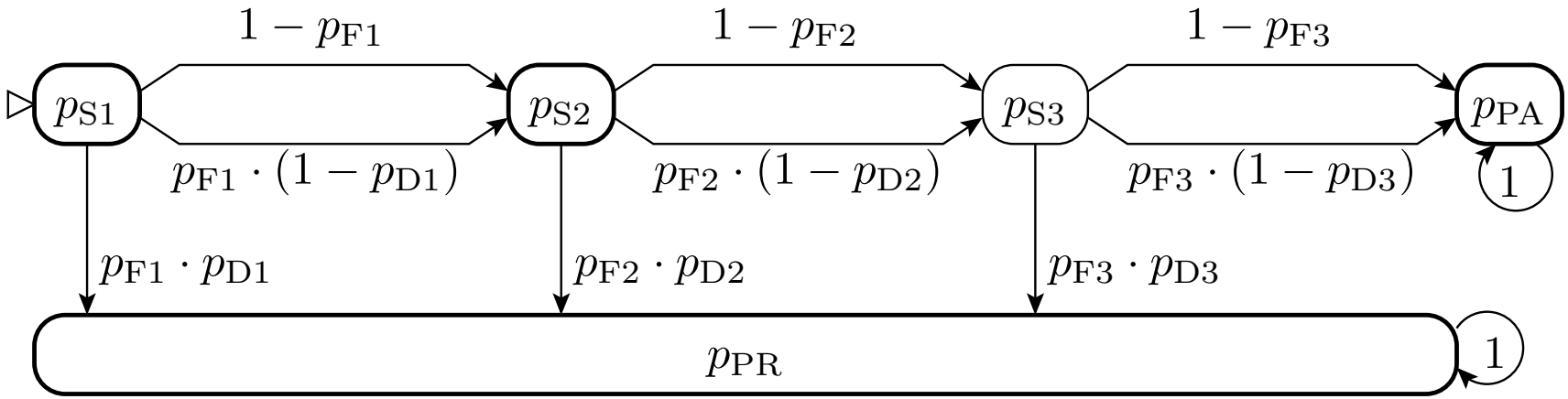
$$\mu_{\mathrm{CF}} = \xi \cdot C \tag{1.91}$$

- Modellierung der Entstehung guter und defekter Produkte durch Markov-Ketten.
- Modellierung der Produktentstehung durch Markov-Ketten mit Kantenzählern zur Abschätzung der Anzahl der entstehenden Fehler.

μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
ξ	Fehlerentstehungsrate.
C	Metrik für den Entstehungsaufwand oder die Größe des Produkts.

Entstehungsprozesse mit Kontrollen

Lineare Folge von Entstehungsschritten. Wenn die Kontrolle i einen Fehler erkennt, wird das Objekt aussortiert, sonst Übergang zum nächsten Schritt ohne oder mit nicht erkennbarem oder erkennbarem entstandenen Fehler:



p_{Si}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
p_{Fi}	Wahrscheinlichkeit, dass in Schritt i ein **F**ehler entsteht.
p_{Di}	Fehlererkennungs- (detection) wahrscheinlichkeit der Kontrolle nach Schritt i.
p_{PA}	Wahrscheinlichkeit, dass Produkt als fehlerfrei akzeptiert wird.
p_{PR}	Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt als fehlerhaft zurückgewiesen wird.

Wahrscheinlichkeit, dass das Objekt als fehlerfrei akzeptiert wird:

$$p_{\mathrm{PA}} = \prod_{i=1}^{3} (1 - p_{\mathrm{D}i} \cdot p_{\mathrm{F}i})$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerfreies Objekt entsteht:

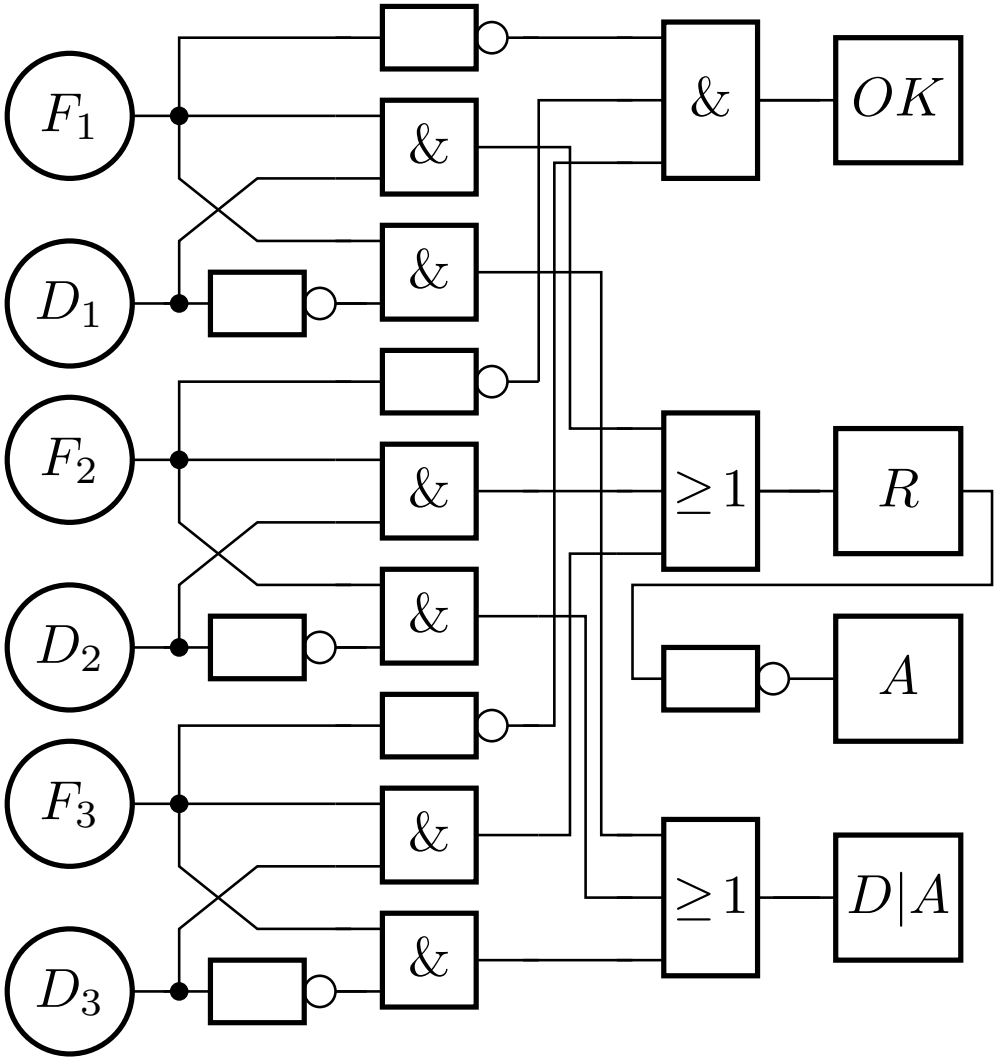
$$p_{\mathrm{OK}} = \prod_{i=1}^{3} (1 - p_{\mathrm{F}i})$$

Defektanteil, Gegenwahrscheinlichkeit der bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt ok ist, wenn es nicht aussortiert wird:

$$DL_{\mathrm{M}} = 1 - \frac{p_{\mathrm{OK}}}{p_{\mathrm{PA}}} = 1 - \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{1-p_{\mathrm{F}i}}{1-p_{\mathrm{D}i} \cdot p_{\mathrm{F}i}} \right)$$

p_{PA}	Wahrscheinlichkeit, dass Produkt als fehlerfrei akzeptiert wird.
$p_{\mathrm{D}i}$	Fehlererkennungs- (detection) wahrscheinlichkeit der Kontrolle nach Schritt i.
$p_{\mathrm{F}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass in Schritt i ein **F**ehler entsteht.
p_{OK}	Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt ok (fehlerfrei) ist.
DL_{M}	Defektanteil nach der Fertigung vor Ersatz erkannter defekter Bauteile.

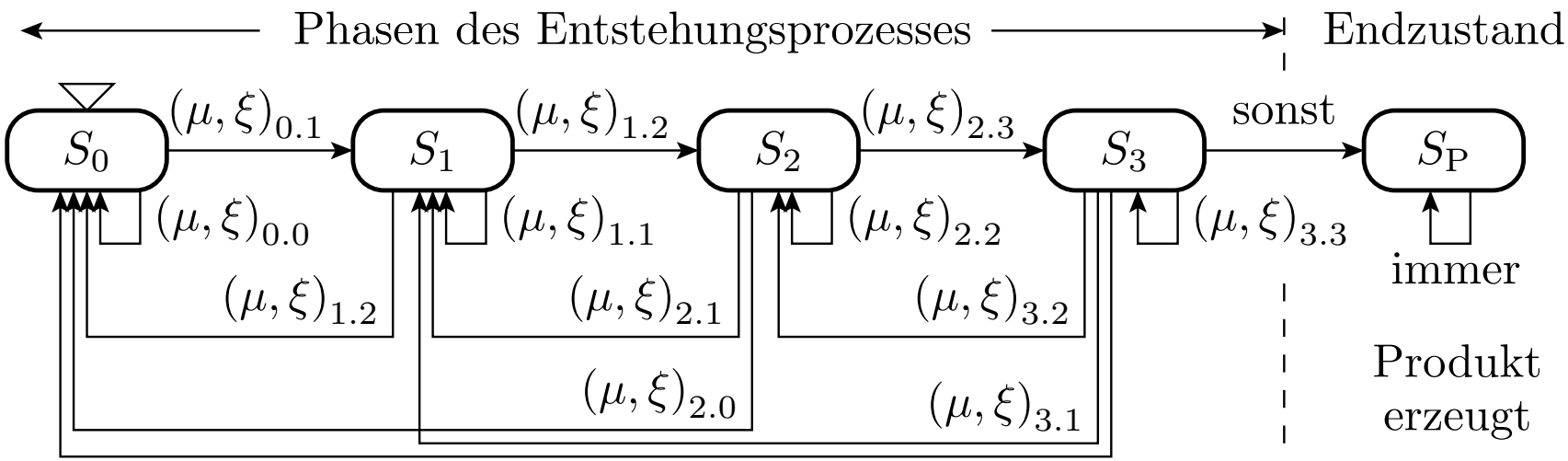
Linearer Entstehungsprozess als Fehlerbaum



Ereignisse bei der Produktentstehung

F_i	Fehler in Schritt i entstanden
D_i	Fehler Schritt i erkannt
OK	Produkt ok
R	Zurückweisung wegen Fehler
A	als fehlerfrei akzptiert
$D\|A$	fehlerhaft, wenn akzeptiert

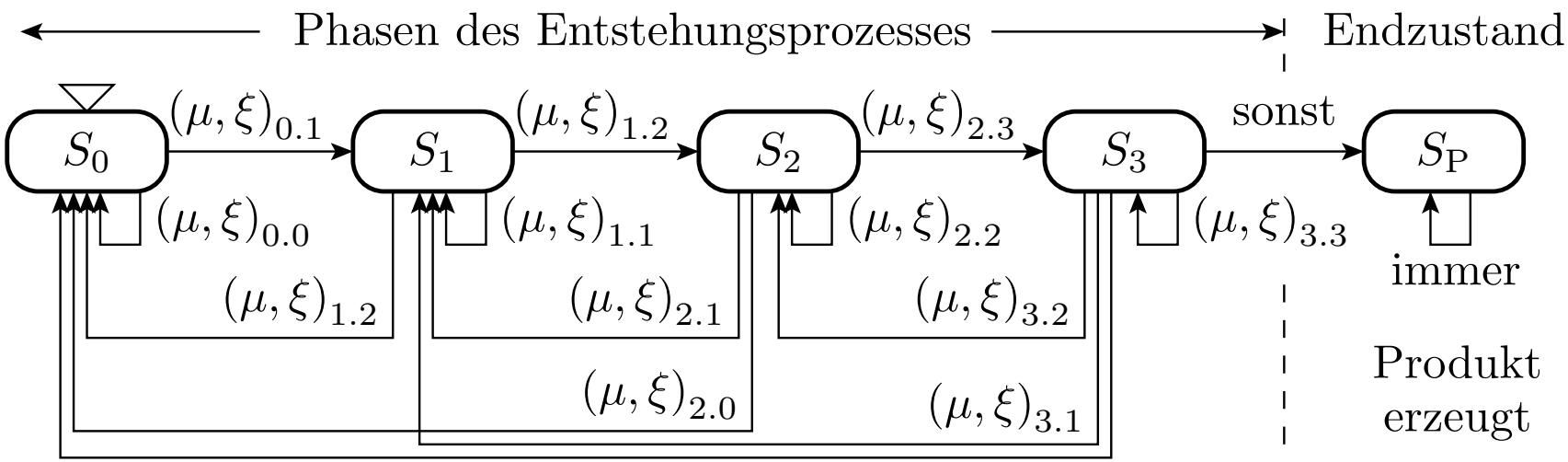
Entstehungsprozesse mit Rückgriffen



- Entstehungsablauf als Folge von Entstehungsphasen.
- nach jeder Phase gibt es eine mittlere Anzahl von Rückgriffen zur Fehlerbeseitigung und einen Wechsel zur nächsten Phase.
- den Rückgriffen und Phasenübergängen sind Erwartungswerte der Übergangsanzahl und Fehlerentstehungsraten zugeordnet.

S_i	Zustand i der Markov-Kette, hier Abarbeitungsphase im Stufenmodell.
S_P	Endzustand Entstehungsprozess abgeschlossen.
$(\mu,\xi)_{i,j}$	Tupel aus erwarteter Übergangsanzahl μ_{ij} und Fehlerentstehungsrateξ_{ij}.

4. Fehlerentstehung



- Übergangswahrscheinlichkeit ist die anteilige Übergangszahl*:

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\sum_{u=0}^{4} \mu_{iu}}$$

- Bei Zustandsübergängen entstehen Fehler, anteilig ξ_{ij} Fehler, die im weiteren Entstehungsablauf nicht beseitigt werden.

$(\mu,\xi)_{i,j}$ Tupel aus erwarteter Übergangsanzahl μ_{ij} und Fehlerentstehungsrateξ_{ij}.

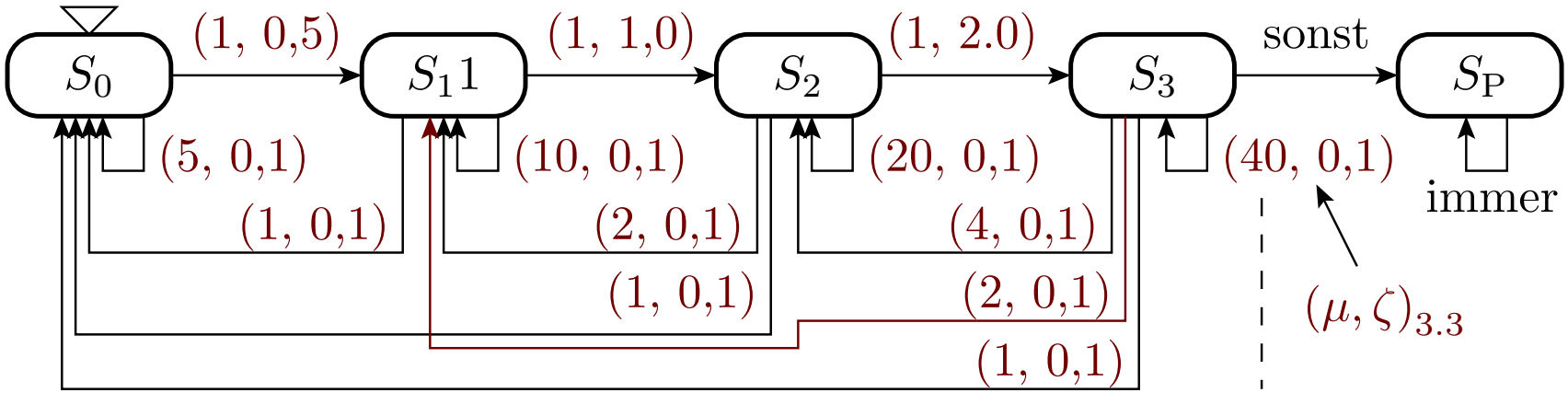
μij Zu erwartender Übergangsanzahl je Erzeugnis von Zustand i nach Zustand j.

ξij Entstehungsrate nicht beseitigbarer Fehler bei Übergang von Zustand i nach Zust. j.

p_{ij} Übergangswahrscheinlich von Zustand i nach von Zustand j.

* Die Übergangszahlen legen fest, in welche Anteilen die Wahrscheinlichkeitsmasse einen Knoten über die abgehenden Kanten verlässt.

Beispiel und Markov-Kette



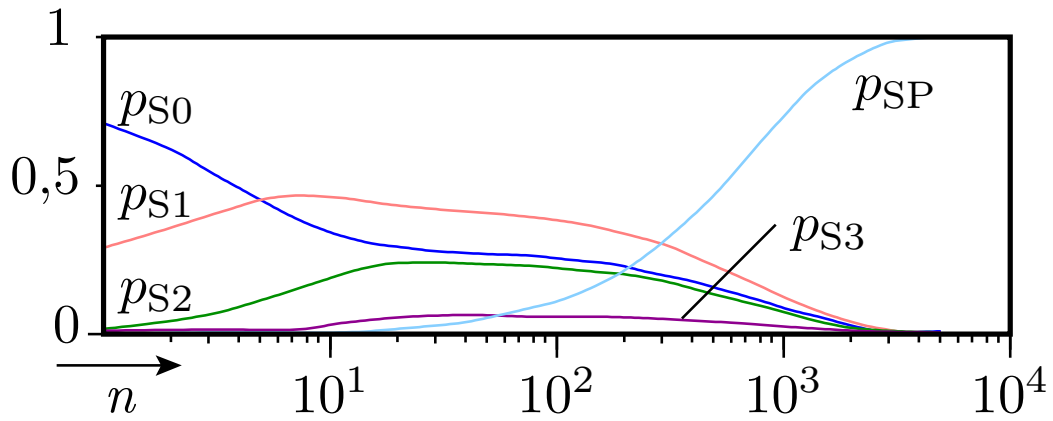
Übergangsmatrix der Markov-Kette:

$$\begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S4} \\ p_{SP} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{10}{12} & \frac{2}{24} & \frac{2}{48} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{20}{24} & \frac{4}{48} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{40}{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S4} \\ p_{SP} \end{pmatrix}_{n}$$

p_{Si}	Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand S_i ist.
μij	Zu erwartender Übergangsanzahl je Erzeugnis von Zustand i nach Zustand j.
ξij	Entstehungsrate nicht beseitigbarer Fehler bei Übergang von Zustand i nach Zust. j.
n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.

Zustandswahrscheinlichkeit

$$\begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S4} \\ p_{SP} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{10}{12} & \frac{2}{24} & \frac{2}{48} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{20}{24} & \frac{4}{48} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{40}{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{S0} \\ p_{S1} \\ p_{S2} \\ p_{S4} \\ p_{SP} \end{pmatrix}_{n}$$



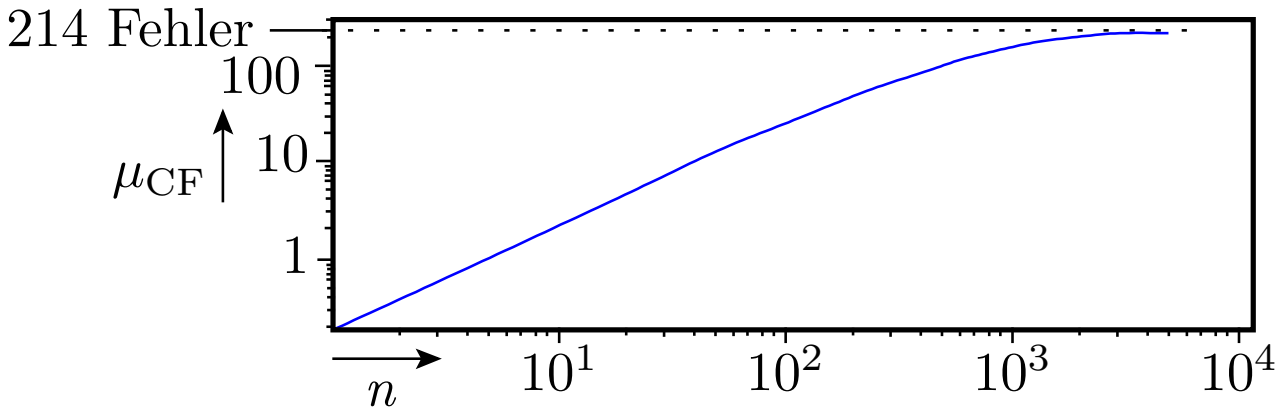
p_{Si}	Wahrscheinlichkeit, dass sich der Entstehungsprozess in Phase i befindet.
p_{SP}	Wahrscheinlichkeit, dass der Entstehungsprozess abgeschlossen ist.
n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.

Fehlerentstehung

Zu erwartende Anzahl der entstehenden Fehler

Für alle Kanten von Zustand S_i nach Zustand S_j

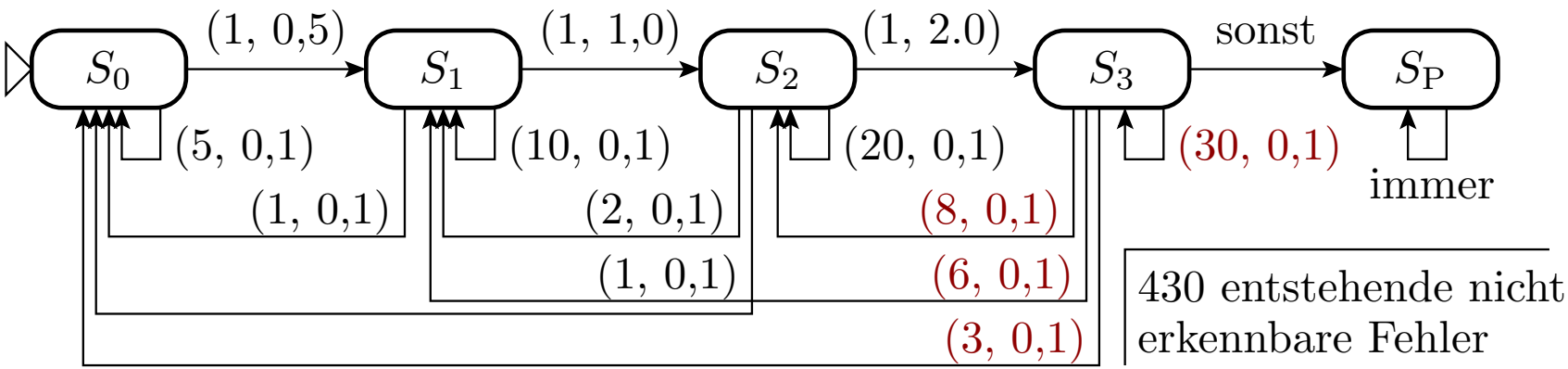
$$\mu_{\mathrm{CF}} \mathrel{+}= p_{\mathrm{S}i} \cdot p_{ij} \cdot \zeta_{ij}$$



Mit den Beispielwerten entstehen ca. 214 Fehler.

μ_{CF}	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus dem Entstehungsprozess.
$p_{\mathrm{S}i}$	Wahrscheinlichkeit, dass sich der Entstehungsprozess in Phase i befindet.
p_{ij}	Übergangswahrscheinlich von Zustand i nach von Zustand j.
ξij	Entstehungsrate nicht beseitigbarer Fehler bei Übergang von Zustand i nach Zust. j.
n	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.

Erhöhung der relativen Rückgriffhäufigkeit



Eine Änderung der Rückgriffwahrscheinlichkeiten in Stufe S_3:

$$
\begin{array}{lrcr}
p_{3.3}: & \frac{40}{48} & \rightarrow & \frac{30}{48} \\
p_{3.2}: & \frac{4}{48} & \rightarrow & \frac{8}{48} \\
p_{3.1}: & \frac{2}{48} & \rightarrow & \frac{6}{48} \\
p_{3.0}: & \frac{1}{48} & \rightarrow & \frac{3}{48} \\
\mu_{\mathrm{CF}}: & 214 & \rightarrow & 450
\end{array}
$$

verdoppelt etwa die Anzahl der entstehenden Fehler und auch etwa den Entstehungsaufwand. Deshalb sollten in Stufenmodellen Rückgriffe über mehrere Stufen möglichst vermieden werden.

Zusammenfassung

- Einfaches Abschätzungsmodell über Metriken:

$$\mu_{\mathrm{CF}} = \xi \cdot C \tag{1.91}$$

- Ein Beispiel für eine Markov-Ketten aus Entstehungs- und Testschritten für ein einzelnen Produkt zur Abschätzung der Anteile der fehlerfreien, der fehlerhaften als gut befundenen und der als fehlerhaft aussortierten Produkte.
- Ein Beispiel-Markov-Kette für das Vorgehen nach einem Stufenmodell mit Rückgriffen und Kantenzählern zur Abschätzung der Anzahl der entstehenden Fehler.
- Mit Beispielsimulationen wurde gezeigt, dass eine geringe Erhöhung der mittleren Rückgrifftiefe den Arbeitsaufwand und die zu erwartende Anzahl der entstehenden Fehler signifikant erhöht.