



# Test und Verlässlichkeit

## Aufgaben für die grosse Übung

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal  
16. Dezember 2024



## 1.1 Inhalt Foliensatz zur großen Übung

### Kenngößen, MF-Handling

- 1.1 Modellbildung
- 1.2 Verfügbarkeit
- 1.3 Zuverlässigkeit
- 1.4 Sicherheit
- 1.5 Überwachung
- 1.6 Abbruch
- 1.7 Wiederholung
- 1.8 Mehrheitsentsch.

### Fehler

- 2.1 Fehlerbeseitigung
- 2.2 Test
- 2.3 Haftfehler
- 2.4 Defektanteil
- 2.5 Zuverlässigkeit und Test
- 2.6 Reifeprozesse
- 2.7 Fehlervermeidung

### Wehrschlichkeiten

### 3.6 Reifeprozess

### Verteilungen

- 4.1 Kenngößen
- 4.2 Verteilung von Zählwerten
- 4.3 Bereichsschätzung
- 4.4 Eintrittswahrscheinlichkeit
- 4.5 Erforderliche Zählwertgröße
- 4.6 Nachweisabhängigkeiten
- 4.7 Mischverteilung
- 4.8 Pareto-Verteilung

### Tests und Kontrollen

- 5.1 Inspektion
- 5.2 Dynamische Tests
- 5.3 Fehlererkennende Codes
- 5.4 Prüfkennzeichen
- 5.5 Fehlerkorrig. Codes
- 5.6 Syntaxtest

### Hardware

### 6.1 Fehlermodellierung



## Kenngrößen, MF-Handling



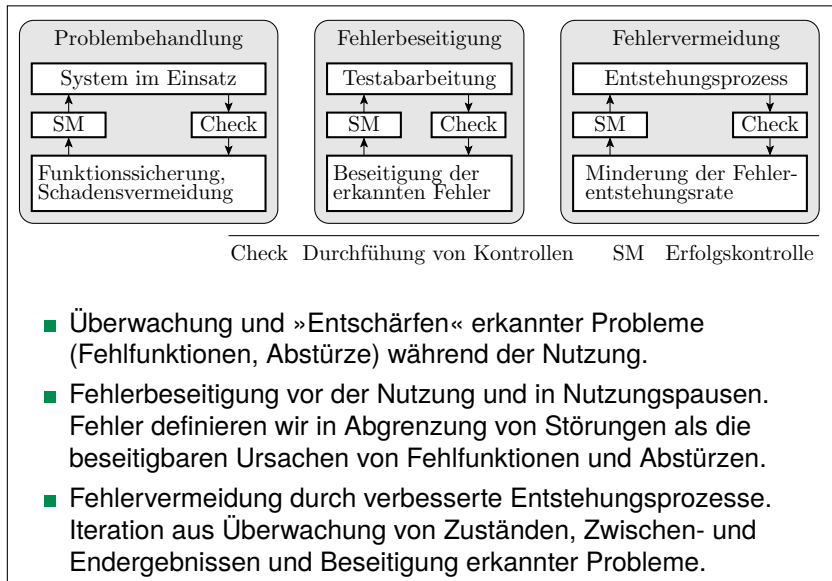
# Modellbildung



## Aufgabe 1.1: Verlässlichkeit, Service-Modell

- a) *Auf welchen drei Ebenen erfolgt die Sicherung der Verlässlichkeit?*
- b) *Was ist eine Fehlerkultur? Was für eine Fehlerkultur unterstellt die Vorlesung und warum?*
- c) *Ein Modell in der Informatik hebt die wesentlichen Aspekte hervor und vernachlässigt unwesentliche Details. Was sind wesentliche Aspekte und was sind vernachlässigte unwesentliche Details das Service-Modells?*
- d) *Auf was für Systemtypen ist das Service-Modell anwendbar?*
- e) *Was hat es mit der Kennzeichnung »ACR« auf sich?*

a) *Auf welchen drei Ebenen erfolgt die Sicherung der Verlässlichkeit?*



- Überwachung und »Entschärfen« erkannter Probleme (Fehlfunktionen, Abstürze) während der Nutzung.
- Fehlerbeseitigung vor der Nutzung und in Nutzungspausen. Fehler definieren wir in Abgrenzung von Störungen als die beseitigbaren Ursachen von Fehlfunktionen und Abstürzen.
- Fehlervermeidung durch verbesserte Entstehungsprozesse. Iteration aus Überwachung von Zuständen, Zwischen- und Endergebnissen und Beseitigung erkannter Probleme.



## b) *Was ist eine Fehlerkultur? Was für eine Fehlerkultur unterstellt die Vorlesung und warum?*

Fehlerkultur ist die Art und Weise, wie eine Kultur mit Fehlern und deren Folgen umgeht.

Idealisierte Fehlerkultur in der Vorlesung: Für alle erkannten Probleme laufen solange Beseitigungsversuche, bis sie nicht mehr erkennbar sind.

Wir betrachten oft nur den Endzustand nach Beseitigung aller erkennbaren Probleme, teilweise auch den Weg dahin und ignorieren

- Probleme, die bei vernünftigem Umgang nicht da sind,
- Kosten für die Beseitigung, Wirtschaftlichkeit,
- kulturelle Barrieren und Gepflogenheiten, ...

Erheblich einfacherere Modellierung als mit »Kulturfaktoren«.

- c) *Ein Modell in der Informatik hebt die wesentlichen Aspekte hervor und vernachlässigt unwesentliche Details. Was sind wesentliche Aspekte und was sind vernachlässigte unwesentliche Details das Service-Modells?*



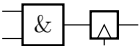
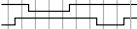
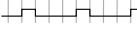
Wesentlich: Abzählbare Anzahl der Service-Anforderungen ( $SR$ ), erbrachten Leistungen ( $DS$ ), nicht erbrachten Leistungen ( $NS$ ), korrekten Leistungen ( $CS$ ) und Fehlfunktionen ( $MF$ ).

Vernachlässigte Details: Funktion, Realisierung.

Das erlaubt, die positiven und negativen Ergebnisse zu zählen und Raten für deren Häufigkeit zu definieren und damit die einzelnen Teilaspekte der Verlässlichkeit (Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit, ...) und die Wirksamkeit verlässlichkeitssichernder Massnahmen (Tests, Problembeseitigung, ...) quantitativ zu beschreiben.



d) *Auf was für Systemtypen ist das Service-Modell anwendbar?*

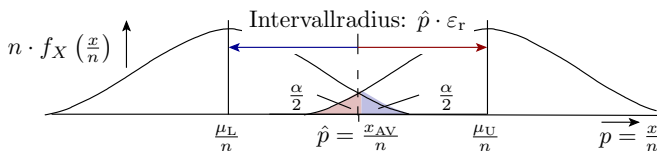
getaktete Digitalschaltung		E:  A: 
Programm mit EVA-Struktur	<pre>uint8_t up(uint8_t a){     return 23 * a; }</pre>	E: 10 101 ... A: 320 19 ...
Server	E: z.B. eine Datenbank Anfrage A: Ergebnisdatensatz	
Fertigungsprozess	E: Fertigungsauftrag, Material, ... A: gefertigtes Produkt	
Entwurfsprozess	E: Entwurfsauftrag A: Entwurf	

Anwendbar auf alle Systeme, die auf Anforderung aus Eingaben Ausgaben erzeugen: Hardware, Software, Mechatronische Systeme, Entwurfsprozesse, Fertigungsprozesse incl. der für die Hardware, ...

E, A

Eingabe, Ausgabe.

e) Was hat es mit der Kennzeichnung »ACR« auf sich?



ACR: Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgröße (Useful estimates only with appropriate counting ranges).

Unsere Kenngrößen für Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit, Testgüte, Problembeseitigungserfolg, ... ergeben sich alle aus Zählwerten für zufällige Ereignisse (Ergebnis erbracht, richtig, falsch, ...).

Die beste Vorhersage der künftigen Häufigkeit zufälliger Ereignisse ist der Erwartungswert. Eine brauchbare Abschätzung von Erwartungswerten verlangt ausreichend große Zählwerte. Wie groß, behandelt erst Foliensatz 4.



# Verfügbarkeit

## Aufgabe 1.2: Verfügbarkeit, Problembehandlungsdauer

Eine Steuerung mit einer mittleren Zeit *zwischen* den Fehlfunktionen von zwei Jahren soll eine Verfügbarkeit von  $1 - 10^{-6}$  haben. In 99% der Fälle startet das System ohne Reparatur und Korrektur automatisch neu und ist nach  $t_{TS1} = 30\text{ s}$  wieder betriebsbereit und in 1% der Fälle muss zusätzlich die Steuerung getauscht werden. Andere Aspekte der Nichtverfügbarkeit bleiben unbeachtet.

---

$\bar{t}_{\text{NoP}} = 2\text{ Jahre}$ ,  $A \geq 1 - 10^{-6}$ , für 99% der MF automatische Fehlfunktionsbehandlung mit  $t_{TS1} = 30\text{ s}$ , 1% der MF durch Ausfall, Reparaturdauer  $t_{TS2}$ .

- Wie viel Zeit steht im Mittel für Problembehandlung zu Verfügung?
- Wie groß darf die mittlere Zeit  $\bar{t}_{TS2}$  für den Tausch der Steuerung betragen?
- Wiederholen Sie die Abschätzung für eine geforderte Verfügbarkeit von nur  $A = 1 - 10^{-5}$ ?

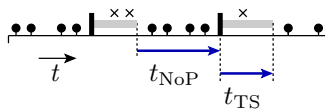


$\bar{t}_{\text{NoP}} = 2 \text{ Jahre}$ ,  $A \geq 1 - 10^{-6}$ , für 99% der MF automatische Fehlfunktionsbehandlung mit  $t_{\text{TS1}} = 30 \text{ s}$ , 1% der MF durch Ausfall, Reparaturdauer  $t_{\text{TS2}}$ .

a) *Wie viel Zeit steht im Mittel für Problembehandlung zu Verfügung?*

(1.2)

$$A = \frac{\bar{t}_{\text{NoP}}}{\bar{t}_{\text{NoP}} + t_{\text{TS}}}$$



- nutzbare Service-Leistung
- × Service-Verweigerung
- ▮ erkanntes Problem
- ▬ Problembehandlung

$$\begin{aligned} \bar{t}_{\text{TS}} &= \frac{\bar{t}_{\text{NoP}}}{A} - \bar{t}_{\text{NoP}} = \bar{t}_{\text{NoP}} \cdot \left( \frac{1-A}{A} \right) \\ &= 2 \text{ Jahre} \cdot 10^{-6} = 31,54 \text{ s} \end{aligned}$$

$\bar{t}_{\text{NoP}}$  Mittlere problemfreie Zeit.

$t_{\text{TS}}, \bar{t}_{\text{TS}}$  Zeit und mittlere Zeit für die Problembehebung (troubleshooting).

$A$  Verfügbarkeit (Availability).



$\bar{t}_{\text{NoP}} = 2$  Jahre,  $A \geq 1 - 10^{-6}$ , für 99% der MF automatische Fehlfunktionsbehandlung mit  $t_{\text{TS1}} = 30$  s, 1% der MF durch Ausfall, Reparaturdauer  $t_{\text{TS2}}$ .

b) *Wie groß darf die mittlere Zeit  $\bar{t}_{\text{TS2}}$  für den Tausch der Steuerung betragen?*

$$\begin{aligned}\bar{t}_{\text{TS}} &= 99\% \cdot t_{\text{TS1}} + 1\% \cdot \bar{t}_{\text{TS2}} \\ \bar{t}_{\text{TS2}} &= \frac{\bar{t}_{\text{TS}} - 99\% \cdot t_{\text{TS1}}}{1\%} \\ &= 100 \cdot (31,54 \text{ s} - 99\% \cdot 30 \text{ s}) = 164 \text{ s}\end{aligned}$$

Der Tausch einer Steuerung innerhalb von im Mittel 2,5 min verlangt eine Ersatzsteuerung vor Ort, die automatisch und ohne manuelle Unterstützung die Aufgaben der ausgefallenen Steuerung übernimmt.



$\bar{t}_{\text{NoP}} = 2$  Jahre,  $A \geq 1 - 10^{-6}$ , für 99% der MF automatische Fehlfunktionsbehandlung mit  $t_{\text{TS1}} = 30$  s, 1% der MF durch Ausfall, Reparaturdauer  $t_{\text{TS2}}$ .

c) *Wiederholen Sie die Abschätzung für eine geforderte Verfügbarkeit von nur  $A = 1 - 10^{-5}$ ?*

$$(1.2) \quad A = \frac{\bar{t}_{\text{NoP}}}{\bar{t}_{\text{NoP}} + t_{\text{TS}}}$$

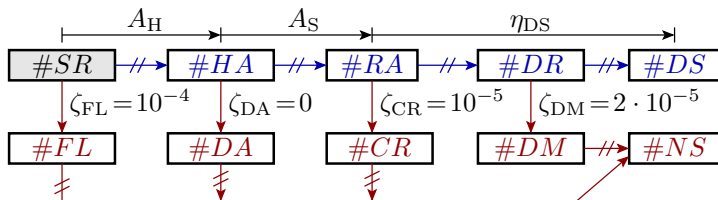
$$\bar{t}_{\text{TS}} = \bar{t}_{\text{NoP}} \cdot \left(\frac{1-A}{A}\right) = 315,4 \text{ s}$$

Zehnfacher Wert gegenüber Aufgabenteil a.

$$\begin{aligned} \bar{t}_{\text{TS2}} &= \frac{\bar{t}_{\text{TS}} - 99\% \cdot t_{\text{TS1}}}{1\%} \\ &= 100 \cdot (315,4 \text{ s} - 99\% \cdot 30 \text{ s}) \approx 8 \text{ Stunden} \end{aligned}$$

Ein Tausch in 8 Stunden verlangt, dass 7 Tage pro Woche für 24 Stunden Reparaturpersonal bereit steht und die Ersatzsteuerung schnell beschaffbar ist.

## Aufgabe 1.3: Verfügbarkeit, CVA-Graph

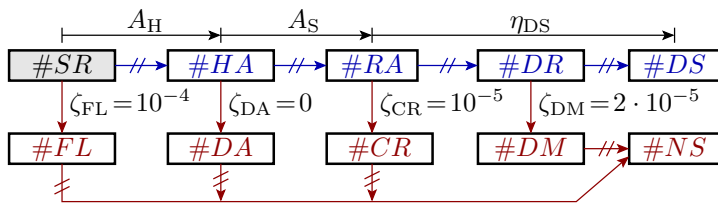


- Wie heißen die Zählwerte und Problemraten?
- Wie groß sind die einzelnen Teilverfügbarkeiten?
- Wie groß ist die Verfügbarkeit insgesamt?

---

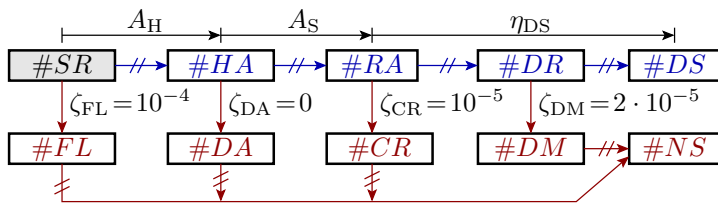
$A_H$	Hardware-Verfügbarkeit.
$A_S$	Service-Verfügbarkeit.
$\eta_{DS}$	Rate der erbrachten Service-Leistungen.





a) *Wie heißen die Zählwerte und Problemraten?*

# <i>evt</i>	Anzahl der Zählereignisse, $evt \in \{SR, HA, \dots\}$ .
<i>SR, HA</i>	Service-Anforderung, Hardware verfügbar.
<i>RA, DR</i>	Service-Anforderung akzeptiert, erbrachtes Ergebnis.
<i>DS, NS</i>	Erbrachte Service-Leistung, keine Service-Leistung.
<i>FL, DA</i>	Nichtverfügbarkeit wegen Hardware-Ausfall bzw. Annahmeverweigerung.
<i>CR, DM</i>	Nichtverfügbarkeit wegen Absturz bzw. erkannter Fehlfunktion.
$\zeta_{FL}, \zeta_{DA}$	HW-Nichtverfügbarkeitsrate, Service-Verweigerungsrate.
$\zeta_{CR}, \zeta_{DM}$	Absturzrate, Rate der erkannten Fehlfunktionen.



b) Wie groß sind die einzelnen Teilverfügbarkeiten?

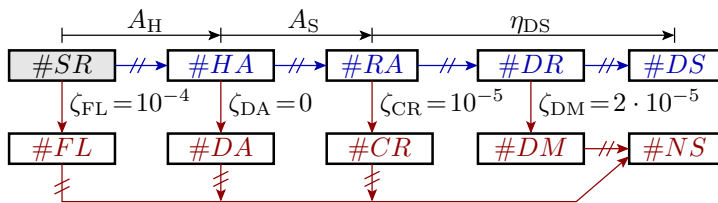
$$(1.3) \quad A_H = (1 - \zeta_{FL}) + \zeta_{FL} \cdot \nu_{FL}$$

$$(1.4) \quad A_S = (1 - \zeta_{DA}) + \zeta_{DA} \cdot \nu_{DA}$$

$$A_H = (1 - \zeta_{FL}) + \zeta_{FL} \cdot 0 = 1 - 10^{-4} \left[ \frac{HA}{SR} \right]$$

$$A_S = (1 - 0) + 0 \cdot \dots = 1 \left[ \frac{RA}{HA} \right]$$

$$\eta_{DS} = \frac{\#DS}{\#RA} \Big|_{ACR} = (1 - \zeta_{CR}) \cdot (1 - \zeta_{DM}) = 1 - 3 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{DS}{RA} \right]$$



c) Wie groß ist die Verfügbarkeit insgesamt?

(1.5)

$$A = A_H \cdot A_S \cdot \eta_{DS}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - 10^{-4}) \left[ \frac{HA}{SR} \right] \cdot 1 \left[ \frac{RA}{HA} \right] \cdot (1 - 3 \cdot 10^{-5}) \left[ \frac{DS}{RA} \right] \\
 &= 1 - (10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5}) \left[ \frac{DS}{SR} \right]
 \end{aligned}$$

$A_H$  Hardware-Verfügbarkeit.  
 $A_S$  Service-Verfügbarkeit.  
 $\eta_{DS}$  Rate der erbrachten Service-Leistungen.



# Zuverlässigkeit



## Aufgabe 1.4: Transistorausfall

Durch den Ausfall eines Transistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von  $\zeta_1 = 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$  auf  $\zeta_2 = 10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$ .

- Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?
- Welche MF-Rate verursacht der ausgefallene Transistor?

---

 $\zeta$  $\left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$ 

Fehlfunktionsrate.

Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.



Durch den Ausfall eines Transistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von  $\zeta_1 = 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$  auf  $\zeta_2 = 10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$ .

a) *Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?*

$$(1.9) \quad \zeta_{[\text{MT}]} = \frac{1}{R_{[\text{MT}]}} = \frac{\#NDM}{\#DS} \Big|_{\text{ACR}}$$

Vor dem Ausfall:

$$R_1 = \frac{1}{10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]} = 10^5 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

Nach dem Ausfall:

$$R_2 = \frac{1}{10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]} = 10^4 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

$R$

Zuverlässigkeit (Reliability).

$\left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$

Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.



Durch den Ausfall eines Transistors in einem Schaltkreis steigt die Fehlfunktionsrate eines Rechners von  $\zeta_1 = 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$  auf  $\zeta_2 = 10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$ .

b) Welche MF-Rate verursacht der ausgefallene Transistor?

$$(1.11) \quad \zeta_{[\text{MT}]} = \sum_{i=1}^{\#MFC} \zeta_{[\text{MT}].i}$$

MF-Rate des ausgefallenen Transistors:

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \zeta_1 + \zeta_{\text{Tr}} \\ \zeta_{\text{Tr}} &= \zeta_2 - \zeta_1 \\ &= 10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right] - 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right] = 9 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right] \end{aligned}$$

- $\zeta$  Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).
- $\#MFC$  Anzahl MF-Klassen, hier MF durch ausgefallenen Transistor und sonstige MF.
- $\zeta_i$  MF-Rate der MF-Klasse  $i$  (MF rate of MF class  $i$ ).
- $\zeta_{\text{Tr}}$  Fehlfunktionsrate verursacht durch den ausgefallenen Transistor.



## Aufgabe 1.5: Zuverlässigkeit Gesamtsystem

Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Festplatte	Stromversorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	$R_R$	$R_{Disc}$	$R_{Power}$	$R_{others}$
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

Die Anzahl zeitgleicher MF durch mehrere Teilsysteme und die Anzahl der MF eines Teilsystems ohne Gesamt-MF seien vernachlässigbar.

- Welche Zuverlässigkeit hat das Gesamtsystem?
- Welche MF-Rate hat das Gesamtsystem?

$\left[ \frac{DS}{MF} \right]$

Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.





Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Festplatte	Stromversorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	$R_R$	$R_{Disc}$	$R_{Power}$	$R_{others}$
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

a) Welche Zuverlässigkeit hat das Gesamtsystem?

$$(1.12) \quad \frac{1}{R_{[MT]}} = \sum_{i=1}^{\#MFC} \frac{1}{R_{[MT].i}}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{700} + \frac{1}{2000}} = 203 \left[ \frac{DS}{MF} \right]$$

- $R$  Gesamtzuverlässigkeit (Total reliability).
- $\#MFC$  Anzahl der MF-Klassen (Number of malfunction classes).
- $R_i$  Teilzuverlässigkeit (partial reliability) von MF-Klasse  $i$ .



Ein IT-System bestehe aus folgenden Komponenten:

Teilsystem	Rechner	Festplatte	Stromversorgung	sonstiges
Teilzuverlässigkeit	$R_R$	$R_{Disc}$	$R_{Power}$	$R_{others}$
Wert in DS/MF	1000	500	700	2000

b) Welche MF-Rate hat das Gesamtsystem?

$$(1.9) \quad \zeta_{[MT]} = \frac{1}{R_{[MT]}} = \frac{\#NDM}{\#DS} \Big|_{ACR}$$

$$\zeta = \frac{1}{203 \left[ \frac{DS}{MF} \right]} = 4,93 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{MF}{DS} \right]$$

$\zeta$   $\left[ \frac{MF}{DS} \right]$  Gesamte Fehlfunktionsrate (Total malfunction rate).  
Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.



# Sicherheit



## Aufgabe 1.6: Betriebssicherheit

Bei einem IT-System mit einer mittleren Zeit bis zur nächsten nicht erkannten Fehlfunktionen von  $10^3$  Stunden gefährdet im Mittel jede hundertste Fehlfunktion die Betriebssicherheit. Mittlere Service-Dauer 1 h, Systemauslastung 100%. Sicherheitgefährdungen durch erkennbare Probleme (Ausfälle, Annahmeverweigerung, Absturz und erkannte MF vernachlässigbar.

$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 10^3 \text{ h}, \rho = 10^{-2} \left[ \frac{\text{SP}}{\text{NDM}} \right], \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 1, \zeta_{\text{S.OP}} = \zeta_{\text{S.FL}} = 0$$

a) *Zuverlässigkeit und Sicherheit?*

b) *Um welchen Faktor  $\nu$  muss eine Sicherheitseinheit mit  $R_{\text{SU}} = 5.000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$  den Anteil der sicherheitskritischen Fehlfunktionen mindestens reduzieren, zur Erhöhung der Sicherheit auf  $S_{\text{SU}} = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$ ?*

---

$\bar{t}_{\text{NDM}}, \bar{t}_{\text{S}}$  Mittlere Service-Zeit je nicht erkannte Fehlfunktion, mittlere Service-Dauer.  
 $\eta_{\text{SU}}$  Systemauslastungsrate.



$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 10^3 \text{ h}, \rho = 10^{-2} \left[ \frac{\text{SP}}{\text{NDM}} \right], \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 1, \zeta_{\text{S.OP}} = \zeta_{\text{S.FL}} = 0$$

a) *Zuverlässigkeit und Sicherheit?*

$$(1.10) \quad R_{[\text{MT}]} = \frac{\eta_{\text{SU}} \cdot \bar{t}_{\text{NDN}}}{\bar{t}_{\text{S}}}$$

$$(1.24) \quad S = \frac{R_{\text{MT}}}{\rho}$$

$$R = \frac{10^3 \text{ h}}{1 \text{ h}} = 10^3 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

$$S = \frac{R}{\rho} = 10^5 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$$

$R_{[\text{MT}]}$	Zuverlässigkeit mit bzw. ohne Fehlfunktionsbehandlung.
$\zeta$	Fehlfunktionsrate.
$R$	Zuverlässigkeit (Reliability).
$\left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$\left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

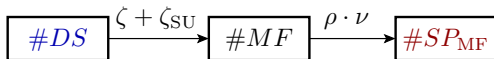


$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 10^3 \text{ h}, \rho = 10^{-2} \left[ \frac{\text{SP}}{\text{NDM}} \right], \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 1, \zeta_{\text{S.OP}} = \zeta_{\text{S.FL}} = 0$$

b) Um welchen Faktor  $\nu$  muss eine Sicherheitseinheit mit  $R_{\text{SU}} = 5.000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$  den Anteil der sicherheitskritischen Fehlfunktionen mindestens reduzieren, zur Erhöhung der Sicherheit auf  $S_{\text{SU}} = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$ ?

(1.25)

$$S_{\text{SU}} = \frac{1}{(\zeta + \zeta_{\text{SU}}) \cdot \rho \cdot \nu}$$



$$\nu \leq \frac{1}{S_{\text{SU}} \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{SU}}} \right) \cdot \rho} = \frac{1}{10^6 \cdot \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^3} \right) \cdot 1\%} = \frac{1}{12}$$

Die Sicherheitseinheit muss bewirken, dass im Mittel von zuvor 12 nur noch ein Problem sicherheitskritisch bleibt.

$\left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$  Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.



# Überwachung



## Aufgabe 1.7: Überwachung

Bei  $10^5$  erbrachten Service-Leitungen sind  $10^3$  Fehlfunktionen und 100 Abstürze aufgetreten. Von den Fehlfunktionen hat die Kontrolle 600 erkannt hat. Von den korrekte Service-Leistungen hat die Kontrolle 10 als Fehlfunktionen ausgewiesen.

$$\#DS = 10^5, \#MF = 10^3, \#CR = 10^2, \#DM = 600, \#PM = 10$$

- Tragen Sie die gegebenen Zählwerte in einen angepassten CVA-Graphen ein mit zusätzlichen Zählfeldern für akzeptierte Anforderungen (RA), erbrachte Ergebnisse (DR), korrekte Ergebnisse (CR) und nicht erkannte Fehlfunktionen (NDM) ein.
- Wie groß sind Fehlfunktionsabdeckung und Phantomfehlfunktionsrate der Überwachung?
- Wie groß sind Zuverlässigkeit und Erbringungsrate?

---

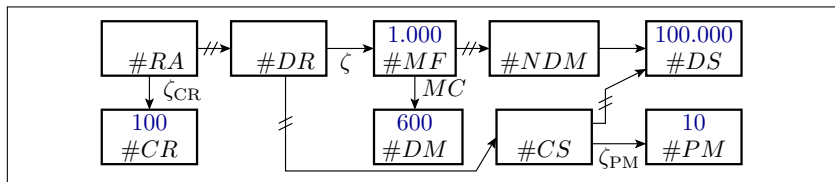
$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$\#DM$	Anzahl der erkannten Fehlfunktionen (Number of detected MFs).
$\#PM$	Anzahl der Phantom-MF, d.h. der korrekten DS, die als MF klassifiziert werden.





$\#DS = 10^5$ ,  $\#MF = 10^3$ ,  $\#CR = 10^2$ ,  $\#DM = 600$ ,  $\#PM = 10$

a) Tragen Sie die gegebenen Zählwerte in einen angepassten CVA-Graphen ein mit zusätzlichen Zählfeldern für akzeptierte Anforderungen (RA), erbrachte Ergebnisse (DR), korrekte Ergebnisse (CR) und nicht erkannte Fehlfunktionen (NDM) ein.



$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$\#DM$	Anzahl der erkannten Fehlfunktionen (Number of detected MFs).
$\#PM$	Anzahl der Phantom-MF, d.h. der korrekten DS, die als MF klassifiziert werden.
$\#CR$	Zählwert der Abstürze.
$MC, \zeta_{PM}$	Fehlfunktionsabdeckung, Phantomfehlfunktionsrate.
$\zeta_{CR}, \zeta$	Absturzrate, Fehlfunktionsrate.



$$\#DS = 10^5, \#MF = 10^3, \#CR = 10^2, \#DM = 600, \#PM = 10$$

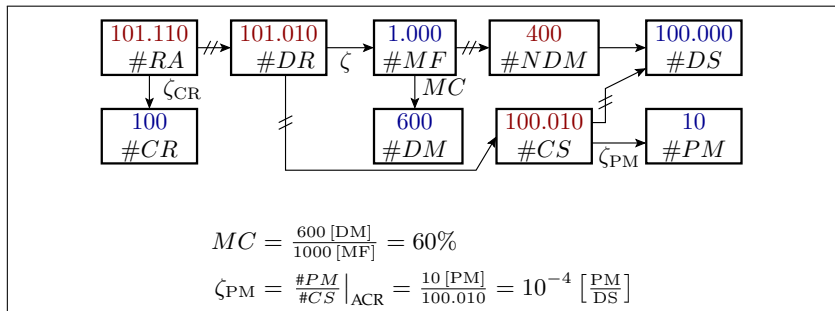
b) *Wie groß sind Fehlfunktionsabdeckung und Phantomfehlfunktionsrate der Überwachung?*

(1.26)

$$MC = \frac{\#DM}{\#MF} \Big|_{ACR}$$

(1.27)

$$\zeta_{PM} = \frac{\#PM}{\#CS} \Big|_{ACR}$$



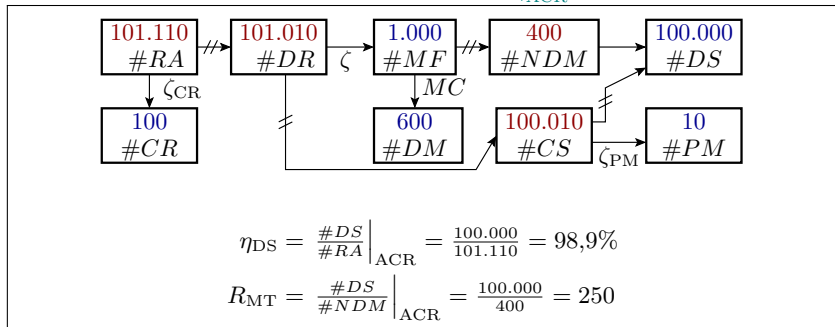


$$\#DS = 10^5, \#MF = 10^3, \#CR = 10^2, \#DM = 600, \#PM = 10$$

c) Wie groß sind Zuverlässigkeit und Erbringungsrate?

(1.8)

$$R_{[MT]} = \frac{\#DS}{\#NDM} \Big|_{ACR}$$



$\eta_{DS}$

Rate der erbrachten Service-Leistungen.

$R_{MT}$

Zuverlässigkeit mit Fehlfunktionsbehandlung.

ACR

Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.



# Abbruch

## Aufgabe 1.8: Sicherer Zustand, Abbruch

Bei einem IT-System mit einer mittleren Nutzungsdauer zwischen zwei MF von 2500 Stunden, einer mittleren Service-Dauer von einer Stunde, Systemauslastung 40% gefährde abschätzungsweise jede hundertste MF die Betriebssicherheit. Um die Betriebssicherheit auf  $10^6 \left[ \frac{DS}{SP} \right]$  zu erhöhen, soll das System um eine MF-Behandlung erweitert werden, die es bei Erkennen einer Fehlfunktion in einen sicheren Zustand überführt.

$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 2.500 \text{ h}, \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 40\%, \rho = 1\%, S = 10^6 \left[ \frac{DS}{SP} \right]$$

- Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn beim Überführen in den sicheren Zustand keine Fehlfunktionen auftreten?*
- Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn im Mittel jeder 20te Versuch, einen sicheren Zustand herzustellen, scheitert?*
- In welchem mittleren zeitlichen Abstand wird ein sicherer Zustand hergestellt, ohne dass die Betriebssicherheit gefährdet ist?*

$\bar{t}_{\text{NDM}}, \bar{t}_{\text{S}}$

Mittlere Service-Zeit je nicht erkannte Fehlfunktion, mittlere Service-Dauer.

$\eta_{\text{SU}}, S$

Systemauslastungsrate, Sicherheit.

$\rho$

Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen.

$\left[ \frac{DS}{SP} \right]$

Verhältnis in erbrachten Service-Leistungen je sicherheitsgefährdende Fehlfunktion.



$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 2.500 \text{ h}, \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 40\%, \rho = 1\%, S = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$$

a) *Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn beim Überführen in den sicheren Zustand keine Fehlfunktionen auftreten?*

$$(1.10) \quad R_{[\text{MT}]} = \frac{\eta_{\text{SU}} \cdot \bar{t}_{\text{NDM}}}{\bar{t}_{\text{S}}}$$

Sicherheitskritische Probleme nur durch nicht erkannte Fehlfunktionen:

$$S = \frac{1}{\rho \cdot \zeta \cdot (1 - MC)} = \frac{R}{\rho \cdot (1 - MC)}$$
$$R = \frac{40\% \cdot 2.500 \text{ h}}{1 \text{ h}} = 1000$$
$$MC = 1 - \frac{R}{\rho \cdot S} = 1 - \frac{1000}{1\% \cdot 10^6} = 90\%$$

$R$  Zuverlässigkeit (Reliability).

$MC$  Fehlfunktionsabdeckung (malfunction coverage), Anteil nachweisbare Fehlfunktionen.



$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 2.500 \text{ h}, \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 40\%, \rho = 1\%, S = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$$

b) *Erforderliche Fehlfunktionsabdeckung, wenn im Mittel jeder 20te Versuch, einen sicheren Zustand herzustellen, scheitert?*

Potentielle sicherheitskritische Probleme zusätzlich für jede zwanzigste, d.h. 5% der erkannten Fehlfunktionen:

$$S = \frac{1}{\rho \cdot (\zeta \cdot (1 - MC) + 5\% \cdot \zeta \cdot MC)} = \frac{R}{\rho \cdot ((1 - MC) + 5\% \cdot MC)}$$
$$MC = \frac{1 - \frac{R}{\rho \cdot S}}{95\%} = \frac{90\%}{95\%} = 94,7\%$$

Überschlag zur Kontrolle: Statt 1 von 10 darf etwa nur 1 von 20 Fehlfunktionen unerkannt bleiben.



$$\bar{t}_{\text{NDM}} = 2.500 \text{ h}, \bar{t}_{\text{S}} = 1 \text{ h}, \eta_{\text{SU}} = 40\%, \rho = 1\%, S = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{SP}} \right]$$

c) *In welchem mittleren zeitlichen Abstand wird ein sicherer Zustand hergestellt, ohne dass die Betriebssicherheit gefährdet ist?*

Ein sicherer Zustand wird für 95% der erkannten Fehlfunktionen, d.h. für

$$MC \cdot 95\% = 90\%$$

aller Fehlfunktionen hergestellt. Mittlerer Zeitabstand:

$$\bar{t}_{\text{NDM}}/90\% = 2778 \text{ h}$$

In 99% der Fälle ist die Fehlfunktion nicht sicherheitskritisch. Mittlere Zeit zwischen dem Herstellen eines sicheren Zustands ohne Gefährdung der Betriebssicherheit:

$$2778 \text{ h}/99\% = 2800 \text{ h}$$





# Wiederholung



## Aufgabe 1.9: Übertragung mit Wiederholung nach MF

Datenübertragung mit Fehlfunktionsrate  $10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$  und 8 redundanten Bits je Datensatz. Verfälschung werden gleichhäufig auf alle darstellbaren Werte verteilt und Erkennung aller unzulässigen Werte. Max. eine Wiederholung nach erkannten Problemen. MF-Usache zu 100% Störungen. Ausfälle sollen nicht betrachtet werden.

$$\zeta = 10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], r = 8, \eta_{\text{Div}} = 1, \zeta_{\text{PM}} = \zeta_{\text{CR}} = 0.$$

- Fehlfunktionsabdeckung?*
- Zuverlässigkeit ohne und mit Fehlfunktionsbehandlung?*
- Erbringungsrate ohne und mit max. einer Wiederholanforderung bei Empfang einer erkannten verfälschten Nachricht?*
- Erforderliche Anzahl der redundanten Datenbits zur Erhöhung der Zuverlässigkeit auf  $10^{10}$  übertragene Datensätze je nicht erkannte Datenverfälschung?*

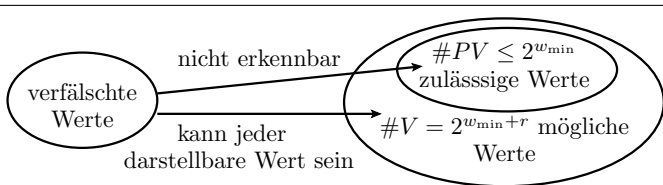
---

$\zeta_{\text{CR}}, \zeta$  Absturzrate, Fehlfunktionsrate.  
 $r$  Anzahl der redundanten Bits.



$$\zeta = 10^{-6} \left[ \frac{MF}{DS} \right], r = 8, \eta_{Div} = 1, \zeta_{PM} = \zeta_{CR} = 0.$$

a) *Fehlfunktionsabdeckung?*



(1.35)

$$\mu_{MC} \geq 1 - 2^{-r}$$

$$MC = 1 - 2^{-8} = 99,61\%$$

$\eta_{Div}$	Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechnung.
$\zeta_{PM}$	Phantom-Fehlfunktionsrate.
$\#VP, \#PP$	Anzahl der gültigen Bitmuster, Anzahl der darstellbaren Bitmuster.
$MC, r$	Fehlfunktionsabdeckung, Anzahl der redundanten Bits.
$w_{min}$	Erforderliche Bitanzahl zu Unterscheidung aller zulässigen Werte.



$$\zeta = 10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], r = 8, \eta_{\text{Div}} = 1, \zeta_{\text{PM}} = \zeta_{\text{CR}} = 0.$$

b) Zuverlässigkeit ohne und mit Fehlfunktionsbehandlung?

$$(1.9) \quad \zeta_{[\text{MT}]} = \frac{1}{R_{[\text{MT}]}} = \frac{\#N\text{DM}}{\#\text{DS}} \Big|_{\text{ACR}}$$

$$(1.36) \quad R_{\text{MT}} = 2^r \cdot R$$

$$R = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]} = 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

$$R_{\text{MT}} = 2^8 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right] = 2,56 \cdot 10^8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

$R_{[\text{MT}]}$

$\left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$

Zuverlässigkeit mit bzw. ohne Fehlfunktionsbehandlung.

Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.



$$\zeta = 10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], r = 8, \eta_{\text{Div}} = 1, \zeta_{\text{PM}} = \zeta_{\text{CR}} = 0.$$

c) *Erbringungsrate ohne und mit max. einer Wiederholanforderung bei Empfang einer erkannten verfälschten Nachricht?*

$$(1.28) \quad \eta_{\text{DS}} = (1 - \zeta_{\text{CR}}) \cdot (1 - \zeta_{\text{SMF}}) \quad \text{mit} \quad \zeta_{\text{SMF}} = \zeta_{\text{PM}} + \zeta \cdot MC - \zeta \cdot \zeta_{\text{PM}}$$

$$(1.41) \quad \eta_{\text{DS.SR}} = \eta_{\text{DS}} \cdot (1 + (1 - \eta_{\text{DS}}) \cdot \eta_{\text{Div}})$$

Erbringungsrate ohne Wiederholanforderung:

$$\eta_{\text{DS}} = 1 - \zeta \cdot MC = 1 - 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right] \cdot (1 - 2^{-8}) = 1 - 10^6 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

Erbringungsrate bei max. einer Wiederholanforderung:

$$\eta_{\text{DS.SR}} = (1 - 10^6) \cdot (1 + 10^6) = 1 - 10^{12}$$

$\eta_{\text{DS}}$  Rate der erbrachten Service-Leistungen.

$\eta_{\text{DS.SR}}$  Erbringungsrate bei max. einer Wiederholung nach Nichterbringung.



$$\zeta = 10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], r = 8, \eta_{\text{Div}} = 1, \zeta_{\text{PM}} = \zeta_{\text{CR}} = 0.$$

- d) *Erforderliche Anzahl der redundanten Datenbits zur Erhöhung der Zuverlässigkeit auf  $10^{10}$  übertragene Datensätze je nicht erkannte Datenverfälschung?*

(1.36)

$$R_{\text{MT}} = 2^r \cdot R$$

$$r = -\log_2 \left( \frac{R_{\text{MT}}}{R} \right) = -\log_2 \left( \frac{10^{10}}{10^6} \right) \geq 13,3$$

Mindestens  $r = 14$  redundante Bits.



## Mehrheitsentsch.



## Aufgabe 1.10: Mehrheitsentscheid

Alle drei Einzelsysteme haben die übereinstimmende Absturzrate  $\zeta_{CR} = 10^{-5}$  und MF-Raten  $\zeta = 10^{-4}$ . 75% der Fehlfunktionen entstehen durch Störungen und sind diversitär. Die restlich 25% der Fehlfunktionen werden durch Fehler verursacht und sind nur zu 60% diversitär. Nicht erbrachte Leistungen sind mit 5% und nicht erkannten Fehlfunktionen mit 1% sicherheitsgefährdet.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%,$$

$$\rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

- Wiederholung des CVA-Graphen aus der Vorlesung?
- Erbringungsrate?
- Zuverlässigkeit?
- Sicherheit?

$\eta_{DS}$  Rate der erbrachten Service-Leistungen.

$\eta_{Div}$  Diversitätsrate, Anteil der nicht übereinstimmenden MF bei Mehrfachberechnung.

$\zeta_{CR}, \zeta$  Absturzrate, Fehlfunktionsrate.

Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen



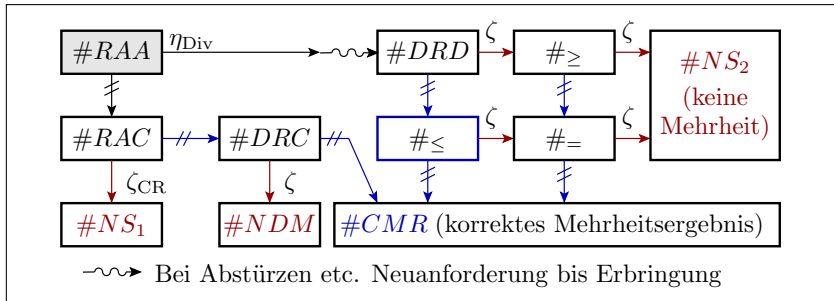


# 1. Kenngrößen, MF-Handling 8. Mehrheitsentsch.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%,$$

$$\rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

a) Wiederholung des CVA-Graphen aus der Vorlesung?



- $RAA$  Alle drei Service-Anforderungen akzeptiert.
- $RAC$  Alle drei Anforderungen akzeptiert, mögliche Probleme haben gemeinsame Ursache.
- $RAD$  Alle drei Anforderungen akzeptiert, mögliche Probleme haben diversitäre Ursachen.
- $DRC$  Alle drei Ergebnis erbracht, mögliche Fehlfunktionen haben gemeinsame Ursache.
- $DRD$  Alle drei Ergebnis erbracht, mögliche Fehlfunktionen haben diversitäre Ursachen.
- $NDM, NS$  Nicht erkannte Fehlfunktion, keine Service-Leistung.

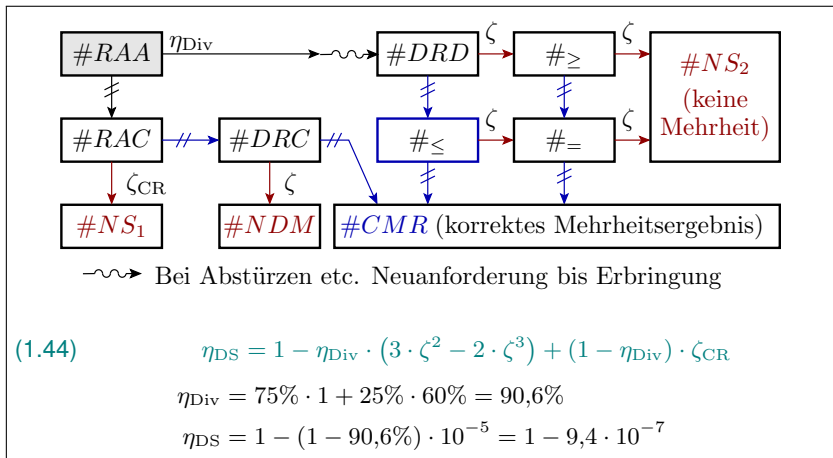
$\# \geq, \# <, \# =$  Mindestens, maximal bzw. genau eine Fehlfunktion bei zwei Berechnungen.



# 1. Kenngrößen, MF-Handling 8. Mehrheitsentsch.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%, \\ \rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

b) *Erbringungsrate?*

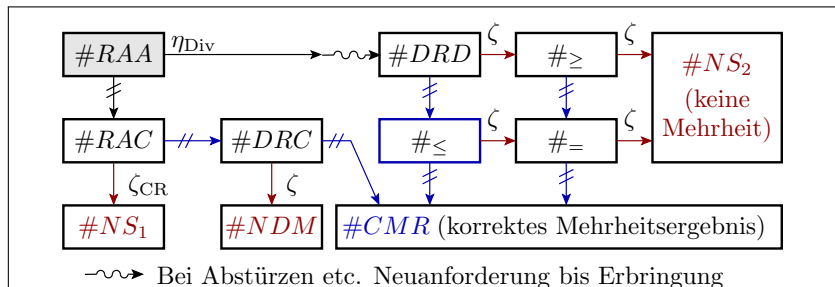




# 1. Kenngrößen, MF-Handling 8. Mehrheitsentsch.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%, \\ \rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

## c) Zuverlässigkeit?



$$(1.45) \quad R_{MV} = \frac{\eta_{DS}}{\eta_{NDM}} = \frac{1 - \eta_{Div} \cdot (3 \cdot \zeta^2 - 2 \cdot \zeta^3) + (1 - \eta_{Div}) \cdot \zeta_{CR}}{(1 - \eta_{Div}) \cdot (1 - \zeta_{CR}) \cdot \zeta}$$

$$R_{MV} = \frac{1 - (1 - 90,6\%) \cdot 10^{-5}}{(1 - 90,6\%) \cdot (1 - 10^{-5}) \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{(1 - 90,6\%) \cdot 10^{-4}} = 1,06 \cdot 10^5 \left[ \frac{DS}{NDM} \right]$$

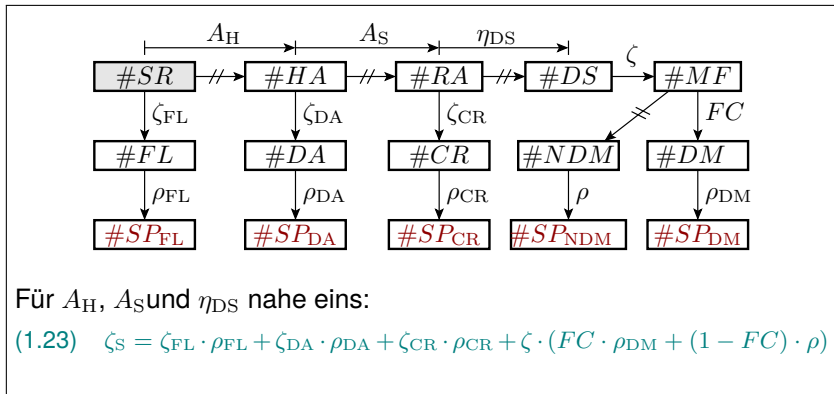


# 1. Kenngrößen, MF-Handling 8. Mehrheitsentsch.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%,$$

$$\rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

d) Sicherheit?



$SR, FL$  Service-Anforderung, Hardware ausgefallen.

$HA, DA$  Hardware verfügbar, Annahme verweigert.

$RA, CR$  Anforderung akzeptiert, Absturz.

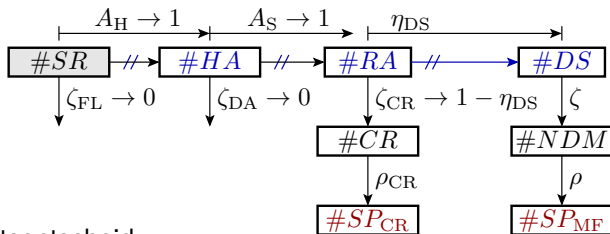
$DS, MF$  Erbrachte Leistung, Fehlfunktion.



# 1. Kenngrößen, MF-Handling 8. Mehrheitsentsch.

$$\zeta_{CR} = 10^{-5} \left[ \frac{CR}{RA} \right], \zeta = 10^{-4} \left[ \frac{MF}{DS} \right], \eta_{Div} = 75\% \cdot 1 + 25\% \cdot 60\%, \\ \rho_{CR} = 5\%, \rho = 1\%$$

d) Sicherheit?



Mehrheitsentscheid

- Versagen durch Abstürze  $\eta_{CR} \rightarrow 1 - \eta_{DS}$
- nicht erkannte und korrigierte Fehlfunktionen:  $\zeta \rightarrow \frac{1}{R_{MT}}$

$$\zeta_S = (1 - \eta_{DS}) \cdot \rho_{CR} + \eta_{DS} \cdot \frac{1}{R_{MT}} \cdot \rho \\ = 9,4 \cdot 10^{-7} \cdot 5\% + \frac{1 - 9,4 \cdot 10^{-7}}{1,06 \cdot 10^5} \cdot 1\% = 1,4 \cdot 10^{-7}$$



# Fehler



# Fehlerbeseitigung



### Aufgabe 2.1: Fehler und Störungen

- a) *Warum ist es viel einfacher, Fehlfunktionen durch Störungen zu korrigieren als solche, die durch Fehler verursacht werden?*
- b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*

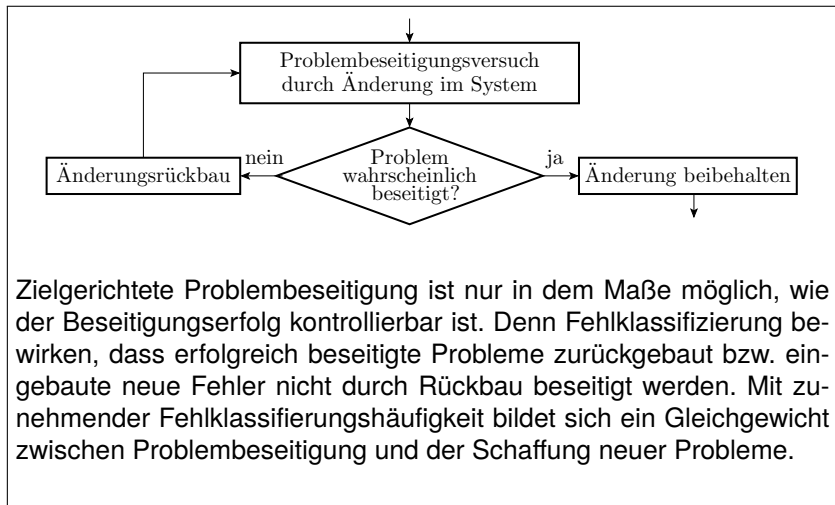




- a) *Warum ist es viel einfacher, Fehlfunktionen durch Störungen zu korrigieren als solche, die durch Fehler verursacht werden?*

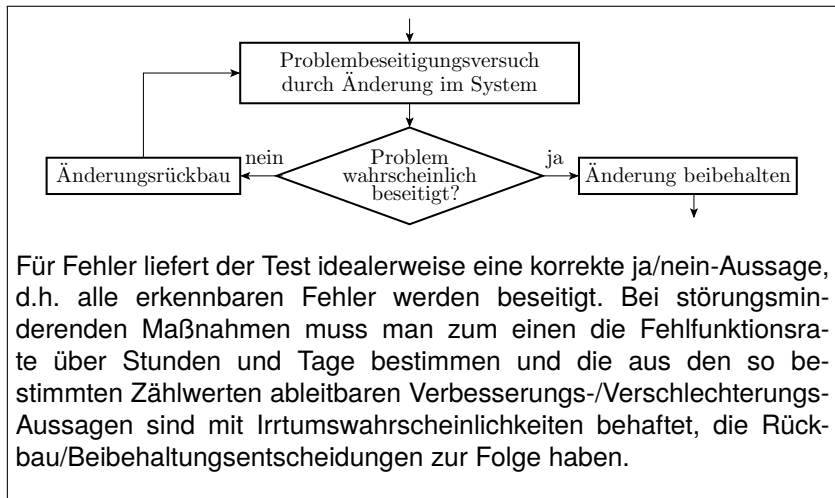
Störungen wirken diversitär. Eine erkannte Fehlfunktion durch eine Störung lässt sich in der Regel durch eine Wiederholanforderung der Service-Leistung mit gleichen Eingaben korrigieren. Bei Fehlern ist man bestrebt, Systeme so zu bauen, dass bei Wiederholung genau dasselbe Problem wieder sichtbar wird. Problemumgehung verlangt »Andersartigkeit« der Neuberechnung. Aufwändig und oft unwirksam.

- b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*



Zielgerichtete Problembeseitigung ist nur in dem Maße möglich, wie der Beseitigungserfolg kontrollierbar ist. Denn Fehlklassifizierung bewirken, dass erfolgreich beseitigte Probleme zurückgebaut bzw. eingebaute neue Fehler nicht durch Rückbau beseitigt werden. Mit zunehmender Fehlklassifizierungshäufigkeit bildet sich ein Gleichgewicht zwischen Problembeseitigung und der Schaffung neuer Probleme.

- b) *Warum ist es bei der Beseitigung der Ursachen genau umgekehrt, dass sich Fehler gut beseitigen lassen, aber die Beseitigung von Störquellen erheblich schwieriger ist?*





Test



### Aufgabe 2.2: Vollständiger Test

Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

- a) *Test mit allen Eingabewerten.*
- b) *Test mit allen 3-Pattern-Tests mit einer 1-0-1 Folge an einem und konstanten Werten an den 39 anderen Eingabebits.*
- c) *Test mit allen Eingabeänderungen.*

---

$w$	Anzahl der Eingabebits.
$t_T$	Testzeit, wenn jeder Einzeltest 100 ns dauert.



Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

a) *Test mit allen Eingabewerten.*

Mit  $w = 40$  Bit sind  $2^{40}$  Eingabewerte darstellbar. Erforderliche Testzeit für das Ausprobieren aller Eingabe:

$$t_{\text{test}} \geq 2^{40} \cdot 100 \text{ ns} = 30,5 \text{ h}$$

b) *Test mit allen 3-Pattern-Tests mit einer 1-0-1 Folge an einem und konstanten Werten an den 39 anderen Eingabebits.*

Für alle 40 Eingänge  $2^{39}$  3-Pattern-Tests:

$$\begin{aligned} t_{\text{T}} &\geq 3 \cdot w \cdot 2^{w-1} \cdot 100 \text{ ns} \\ &= 3 \cdot 40 \cdot 2^{39} \cdot 100 \text{ ns} = 76 \text{ Tage} \end{aligned}$$



Eine Funktion mit 40 Eingabebits soll »vollständig« getestet werden. Die Bestimmung der Ausgabe für eine Eingabe dauert 100 ns. Wie lange dauert der Test, wenn »vollständig« bedeutet

c) *Test mit allen Eingabeänderungen.*

Anzahl der möglichen Eingabeänderungen:

$$2^w \cdot (2^w - 1)$$

Bei geschickter Reihung ist die zweite Eingabe jedes Eingabepaars der erste Wert des Folgeingabepaars:

$$\begin{aligned} t_T &\geq 2^w \cdot (2^w - 1) \cdot 100 \text{ ns} \\ &\approx 2^{80} \cdot 100 \text{ ns} \approx 38 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

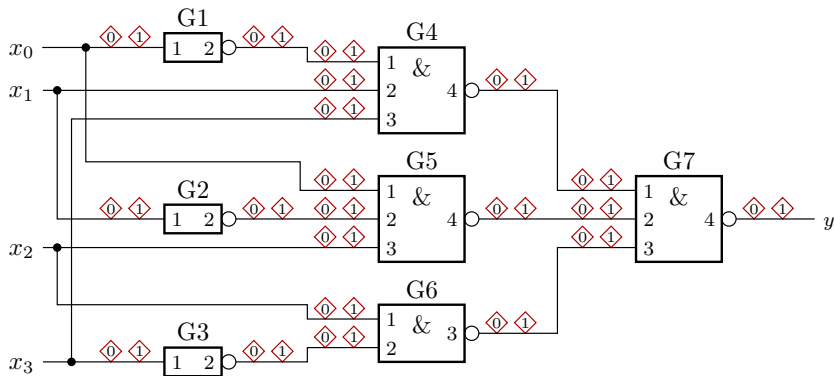
Geschätzte Zeit seit dem Urknall  $14 \cdot 10^9$  Jahre.



# Haftfehler

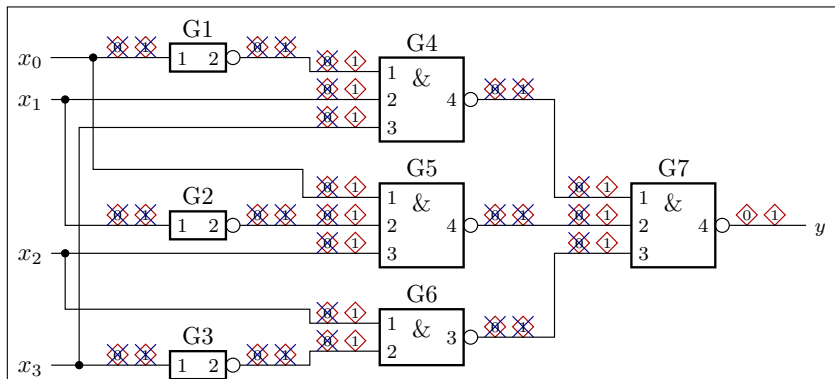


## Aufgabe 2.3: Vereinfachung einer Haftfehlermenge



- Fassen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler zu einem Modellfehler zusammen.
- Bestimmen Sie davon alle implizit nachweisbaren Haftfehler.

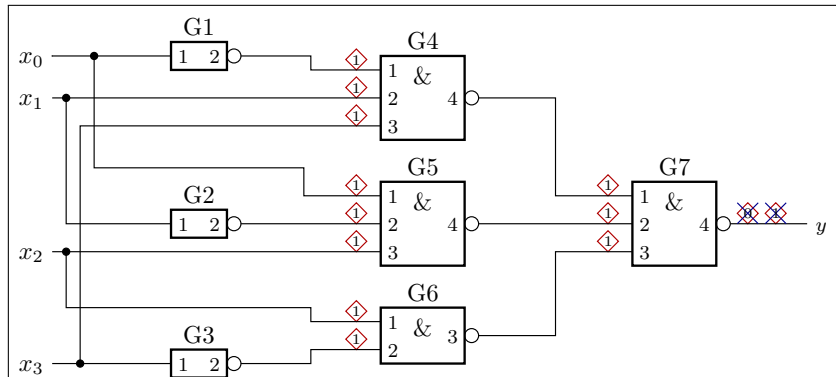
a) Fassen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler zu einem Modellfehler zusammen.



Identisch nachweisbare Haftfehler:

- $sa_0(G1-1), sa_1(G1-2), sa_1(G4-1)$
- $sa_1(G1-1), sa_0(G1-2), sa_0(G4-1), sa_1(G4-4), sa_1(G7-1), \dots$

b) Bestimmen Sie davon alle implizit nachweisbaren Haftfehler.



Implizit nachweisbare Haftfehler:

- sa0(G7-4): sa1(G7-1), sa1(G7-2), sa1(G7-3)
- sa1(G7-4): sa1(G4-1), sa1(G4-2), sa1(G4-3), sa1(G5-1), ...



# Defektanteil



### Aufgabe 2.4: Ausbeute, Defektanteil und -abdeckung

Die Ausbeute in einem Fertigungsprozess beträgt mindestens  $Y \geq 40\%$  und die Produkte sollen einen Defektanteil von max.  $DL \leq 500$  dpm haben.

- Wie groß muss die Defektabdeckung mindestens sein?*
- Auf welchen Wert darf die Ausbeute max. einbrechen, dass der Defektanteil nicht größer als  $DL_{\max} \leq 1.000$  dpm wird?*

---

$DC$	Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
$Y, DL$	Ausbeute, Defektanteil.
$DL_M$	Defektanteil der Fertigung vor Aussortieren der erkannten defekten Produkte.
dpm	Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).



Die Ausbeute in einem Fertigungsprozess beträgt mindestens  $Y \geq 40\%$  und die Produkte sollen einen Defektanteil von max.  $DL \leq 500$  dpm haben.

a) *Wie groß muss die Defektabdeckung mindestens sein?*

$$(2.9) \quad DC = \frac{1-Y}{1+(DL-1) \cdot Y}$$

$$DC \geq \frac{1-40\%}{1+(5 \cdot 10^{-4}-1) \cdot 0,4} = 1 - 3,33 \cdot 10^{-4}$$

Es darf max. einer von 3.000 Defekten unerkannt bleiben.



Die Ausbeute in einem Fertigungsprozess beträgt mindestens  $Y \geq 40\%$  und die Produkte sollen einen Defektanteil von max.  $DL \leq 500$  dpm haben.

b) *Auf welchen Wert darf die Ausbeute max. einbrechen, dass der Defektanteil nicht größer als  $DL_{\max} \leq 1.000$  dpm wird?*

(2.9)

$$DC = \frac{1-Y}{1+(DL-1) \cdot Y}$$

$$Y = \frac{1 - DC}{DL \cdot DC + 1 - DC}$$
$$Y \geq \frac{3,33 \cdot 10^{-4}}{10^{-3} \cdot (1 - 3,33 \cdot 10^{-4}) + 3,33 \cdot 10^{-4}} = 25\%$$

Fehleranteil 1.000 dpm wird schon unterschritten, wenn die Ausbeute 25% unterschreitet.



## Aufgabe 2.5: Defektanteil eines Rechners

Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, ...) und Lötstellen.

Bauteile	Anzahl	Defektanteil	Summation für den gesamten Rechner
Leiterplatten	2	600 dpm	dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+ dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+ dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+ dpm
			= dpm

- a) *Wie groß ist der zu erwartende Defektanteil des Rechners, wenn anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigbar sind?*
- b) *Auf welchen Wert verringert sich der Defektanteil, wenn für alle Arten von Bauteilen die Anzahl halbiert wird?*

dpm      Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).





Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, . . .) und Lötstellen.

a) *Wie groß ist der zu erwartende Defektanteil des Rechners, wenn anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigbar sind?*

(2.11)

$$\mu_F = \sum_{i=1}^{\#Prt} \mu_{DL,i}$$

Bauteil	Anzahl	Defektanteil		Produkt
Leiterplatten	2	600 dpm		1200 dpm
Schaltkreise	30	200 dpm	+	6000 dpm
diskrete Bauteile	180	10 dpm	+	1800 dpm
Lötstellen	5000	1 dpm	+	5000 dpm
			=	14000 dpm

Von 1000 Rechnern enthalten im Mittel 14 beim Verkauf ein defektes Bauteil, das aber in der Regel nur schwer bemerkbare Fehler enthält.

- $\mu_F$  Zu erwartende Fehleranzahl des Gesamtsystems.
- $\#Prt$  Anzahl der Bauteile.
- $\mu_{DL,i}$  Zu erwartender Defektanteil von Bauteil  $i$ .



Ein Steuerrechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerständen, Kondensatoren, . . .) und Lötstellen.

b) *Auf welchen Wert verringert sich der Defektanteil, wenn für alle Arten von Bauteilen die Anzahl halbiert wird?*

Bei der halben Bauteilzahl und ansonsten gleichen Werten halbiert sich der Defektanteil. Statt im Mittel 14 enthalten im Mittel nur 7 von 1000 Rechnern ein defektes Bauteil.



# Zuverlässigkeit und Test

## Aufgabe 2.6: Fehleranzahl, MF-Rate und Zuverlässigkeit

In einer Iteration aus Test und Fehlerbeseitigung, bei der alle erkannten Fehler beseitigt wurden, war bei Erhöhung der Anzahl der dynamischen Tests von  $10^5$  auf  $10^6$  eine Verringerung der MF-Rate von  $10^{-3}$  auf  $4 \cdot 10^{-5}$  MF je DS zu beobachten. MF durch Störungen sind zu vernachlässigen.

$$N_1 = 10^5, N_2 = 10^6, \zeta(N_1) = 10^{-3} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \\ \zeta_D = 0$$

- Auf welchen Exponenten  $K$  für die Dichte der MF-Rate lässt sich unter den Modellannahmen in der Vorlesung daraus schließen?*
- Wie viele Fehler werden in der Iteration aus Test und Beseitigung der erkennbaren Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von  $N_1$  auf  $N_2$  abschätzungsweise beseitigt?*
- Welche Zuverlässigkeit ist nach  $N_2$  Tests zu erwarten und welche Testsatzlänge  $N_3$  ist unter den Modellannahmen erforderlich, um die zu erwartende Zuverlässigkeit auf  $10^8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$  zu erhöhen?*

---

$$N_1, N_2 \quad \text{Testanzahl mit bekannter / gesuchter Fehleranzahl oder Zuverlässigkeit.}$$



$$N_1 = 10^5, N_2 = 10^6, \zeta(N_1) = 10^{-3} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \\ \zeta_D = 0$$

a) Auf welchen Exponenten  $K$  für die Dichte der MF-Rate lässt sich unter den Modellannahmen in der Vorlesung daraus schließen?

$$(2.24) \quad K = \log \left( \frac{\zeta_F(N_1)}{\zeta_F(N_2)} \right) / \log \left( \frac{N_2}{N_1} \right) - 1$$

Wegen  $\zeta_D = 0$  ist  $\zeta_F = \zeta$ :

$$K = \left( \ln \left( \frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}} \right) / \ln \left( \frac{10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]}{10^{-6} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]} \right) \right) - 1 = 0,4$$

$\zeta_F(N)$   
 $\left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$

Fehlfunktionsrate durch Fehler in Abhängigkeit von der Testanzahl.  
 Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

$\zeta_D$

Fehlfunktionsrate durch Störungen (Malfunction rate due to disturbance).

$K$

Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).



$$N_1 = 10^5, N_2 = 10^6, \zeta(N_1) = 10^{-3} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \\ \zeta_D = 0$$

- b) *Wie viele Fehler werden in der Iteration aus Test und Beseitigung der erkennbaren Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von  $N_1$  auf  $N_2$  abschätzungsweise beseitigt?*

$$(2.23) \quad \zeta_F(N) \stackrel{(\leq 1)}{=} \frac{\mu_F(N) \cdot K}{N}$$

$$\mu_F(N_1) = \frac{N_1}{K} \cdot \zeta(N_1) = \frac{10^5}{0,4} \cdot 10^{-3} = 251 \text{ [F]}$$

$$\mu_F(N_2) = \frac{N_2}{K} \cdot \zeta(N_2) = \frac{10^6}{0,4} \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 100 \text{ [F]}$$

Zu erwartende Anzahl der zu beseitigenden Fehler:

$$\mu_F(N_1) - \mu_F(N_2) = 151 \text{ [F]}$$

$\mu_F(N)$   
[F]

Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach  $N$  Tests nicht erkannt und beseitigt sind.  
Zählwert in Fehlern.



$$N_1 = 10^5, N_2 = 10^6, \zeta(N_1) = 10^{-3} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \zeta(N_2) = 4 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right], \\ \zeta_D = 0$$

- c) Welche Zuverlässigkeit ist nach  $N_2$  Tests zu erwarten und welche Testsatzlänge  $N_3$  ist unter den Modellannahmen erforderlich, um die zu erwartende Zuverlässigkeit auf  $10^8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$  zu erhöhen?

$$(2.29) \quad R_F(N) \stackrel{(\geq 1)}{=} = \frac{1}{\zeta_F(N)} = R_F(N_0) \cdot \left( \frac{N}{N_0} \right)^{K+1}$$

$$(2.33) \quad \frac{R_{MT}(N_2)}{R_{MT}(N_1)} = \frac{S(N_2)}{S(N_1)} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^{K+1}$$

Wegen  $\zeta_D = 0$  ist  $\zeta = \zeta_F$  und  $R = R_F$ :

$$R(N_2) = \frac{1}{\zeta(N_2)} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-5}} \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right] = 25.000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

$$N_3 = N_2 \cdot \left( \frac{R(N_3)}{R(N_2)} \right)^{\frac{1}{K+1}} = 10^6 \cdot \left( \frac{10^8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]}{2,5 \cdot 10^4 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]} \right)^{\frac{1}{0,4+1}} = 3,77 \cdot 10^8$$

$R_F(N)$   
 $\left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$

Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit  $N$  Tests nachweisbaren Fehler.  
 Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.

## Aufgabe 2.7: Vortest und Zufallstest

Von 1000 entstandenen Fehlern erkennt der vorgelagerte statische Test 80%, von den verbleibenden 20% erkennen 20 gezielt gesuchte dynamische Tests 60% und von den dann noch verbleibenden 20% · 40% erkennen weitere 80 zufällige Tests 50%. Beseitigung aller erkannten Fehler.

$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

- Mit welchem Exponenten  $K$  nimmt der zu erwartende Anteil der nicht erkannten Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von  $N_0 = 20$  auf  $N_1 = 100$  ab?*
- Zu erwartende Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*
- Wie groß sind Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Erhöhung der Anzahl der Tests von  $N_1 = 100$  auf  $N_2 = 1000$ ?*

---

$\mu_{\text{FCR}}$	Zu erwartende Fehleranzahl aus den Entstehungs- und Reparaturprozessen insgesamt.
$FC_{\text{PT}}$	Fehlerabdeckung aller Vortests zusammen.
$N_0$	Anzahl der dynamischen Tests aller Vortests zusammen.
$N_1, N_2$	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
$\mu_{\text{F}}(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach $N$ Tests nicht erkannt und beseitigt sind.



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

- d) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf 4?*
- e) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf  $R_{\text{F}}(N) = 1000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$ ?*

$$R_{\text{F}}(N) \\ \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$$

Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit  $N$  Tests nachweisbaren Fehler.  
Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

a) *Mit welchem Exponenten  $K$  nimmt der zu erwartende Anteil der nicht erkannten Fehler bei Erhöhung der Testsatzlänge von  $N_0 = 20$  auf  $N_1 = 100$  ab?*

$$(2.17) \quad K = -\log \left( \frac{\mu_{\text{F}}(N_2)}{\mu_{\text{F}}(N_1)} \right) / \log \left( \frac{N_2}{N_1} \right)$$

Bei der Vergrößerung der Anzahl der Zufallstests von  $N_0 = 20$  auf  $N_1 = 100$  halbiert sich die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler:

$$\frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2} = \left( \frac{N_1}{N_0} \right)^{-K} = 5^{-K}$$
$$K = -\frac{\ln(0,5)}{\ln(5)} = 0,431$$

$K$  Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

b) *Zu erwartende Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?*

$$(2.25) \quad \mu_{\text{F}}(N_0) = \mu_{\text{FCR}} \cdot (1 - FC_{\text{PT}})$$

$$(2.30) \quad R_{\text{F}}(N) \stackrel{(\geq 1)}{=} \frac{N}{K \cdot \mu_{\text{F}}(N)}$$

Von den entstandenen Fehlern erkennen die statischen Vortests 80%, davon die dynamischen Vortests 60% und davon die Zufallstests 50%:

$$\mu_{\text{F}}(N_1) = \mu_{\text{FCR}} \cdot (1 - FC_{\text{PT}}) \cdot 0,5 = 1000 [\text{F}] \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 40 [\text{F}]$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\text{F}}(N_1) = \frac{100}{0,431 \cdot 40} = 5,8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$$

( $\leq 1$ ) Der errechnete Wert ist eine Untergrenze. Der tatsächliche Wert ist mindestens eins.



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

c) *Wie groß sind Fehleranzahl und fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Erhöhung der Anzahl der Tests von  $N_1 = 100$  auf  $N_2 = 1000$ ?*

$$(2.16) \quad \mu_{\text{F}}(N_2) = \mu_{\text{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \quad \text{mit } 0 < K < 1$$

$$(2.29) \quad R_{\text{F}}(N) \stackrel{(\geq 1)}{=} \frac{1}{\zeta_{\text{F}}(N)} = R_{\text{F}}(N_0) \cdot \left(\frac{N}{N_0}\right)^{K+1}$$

Zu erwartende Fehleranzahl:

$$\mu_{\text{F}}(N_2) = 40 \text{ [F]} \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{-0,431} = 14,8 \text{ [F]}$$

Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit:

$$R_{\text{F}}(N_2) = 5,8 \left[\frac{\text{DS}}{\text{MF}}\right] \cdot \left(\frac{1000}{100}\right)^{1+0,431} = 157 \left[\frac{\text{DS}}{\text{MF}}\right]$$



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

d) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf 4?*

$$(2.16) \quad \mu_{\text{F}}(N_2) = \mu_{\text{F}}(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} \quad \text{mit } 0 < K < 1$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl  $N_3$ :

$$\begin{aligned} N_3 &= N_1 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{F}}(N_3)}{\mu_{\text{F}}(N_1)}\right)^{-\frac{1}{K}} \\ &= 100 \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^{-\frac{1}{0,431}} = 20.900 \end{aligned}$$

Eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl der nicht beseitigten Fehler von 40 auf 4 erfordert zusätzlich 20.800 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 209-fache Testsatzlänge.



$$\mu_{\text{FCR}} = 10^3, FC_{\text{PT}} = 1 - 0,2 \cdot 0,4, N_0 = 20, N_1 = N_0 + 80, \frac{\mu_{\text{F}}(N_1)}{\mu_{\text{F}}(N_0)} = \frac{1}{2}.$$

e) *Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf  $R_{\text{F}}(N) = 1000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]$ ?*

$$(2.29) \quad R_{\text{F}}(N) \stackrel{(\geq 1)}{=} = \frac{1}{\zeta_{\text{F}}(N)} = R_{\text{F}}(N_0) \cdot \left( \frac{N}{N_0} \right)^{K+1}$$

Umstellung nach der gesuchten Testanzahl  $N_4$ :

$$\begin{aligned} N_4 &= N_1 \cdot \left( \frac{R_{\text{F}}(N_4)}{R_{\text{F}}(N_1)} \right)^{\frac{1}{1+K}} \\ &= 100 \cdot \left( \frac{1000 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]}{5,8 \left[ \frac{\text{DS}}{\text{MF}} \right]} \right)^{\frac{1}{1,431}} = 3.656 \end{aligned}$$

Eine Erhöhung der Zuverlässigkeit von 5,8 auf 1000 (etwa das 170-fache) verlangt nur zusätzlich 3.556 zufällig ausgewählte Tests, d.h. die 25-fache Testsatzlänge.



# Reifeprozesse



## Aufgabe 2.8: Reifeprozess, Zuverlässigkeitserhöhung

Ein bei vielen Nutzern eingesetztes Software-System hat nach einer Reifedauer von 100 Tagen eine Zuverlässigkeit von  $10^5 \frac{DS}{MF}$ . Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge sei  $K = 0,4$ . Die Testanzahl vor dem Einsatz und MF-Rate durch Störungen seien vernachlässigbar.

$$t_{M0} = 100 \text{ Tage}, R(t_{M0}) = 10^5 \left[ \frac{DS}{MF} \right], K = 0,4, \zeta_D = 0, t_{V0} \ll t_{M0}$$

- a) *Nach wie vielen weiteren Tagen Reifedauer verzehnfacht sich die Zuverlässigkeit?*
- b) *Welcher Vergrößerungsfaktor der Zuverlässigkeit ist nach einer Reifezeit von einem Jahr (365 Tage) zu erwarten?*

$\left[ \frac{DS}{MF} \right]$	Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.
$t_{M0}$	Bezugsreifedauer.
$R_F(t_M)$	Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit in Abhängigkeit von der Reifedauer.
$K$	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).
$t_{V0}$	Equivalentente Reifedauer vor Freigabe von Version null.





$t_{M0} = 100$  Tage,  $R(t_{M0}) = 10^5 \left[ \frac{DS}{MF} \right]$ ,  $K = 0,4$ ,  $\zeta_D = 0$ ,  $t_{V0} \ll t_{M0}$

a) *Nach wie vielen weiteren Tagen Reifedauer verzehnfacht sich die Zuverlässigkeit?*

$$(2.44) \quad R_{MT}(t_M) = R_{MT}(t_{M0}) \cdot \left( \frac{t_M + t_{V0}}{t_{M0} + t_{V0}} \right)^{K+1}$$

Unter Vernachlässigung von  $t_{V0}$  gegenüber  $t_M$  und mit  $\zeta_D = 0$  ( $R = R_F$ ) gilt für die gesamte Zuverlässigkeit:

$$\begin{aligned} t_M &= t_{M0} \cdot \left( \frac{R(t_M)}{R(t_{M0})} \right)^{\frac{1}{K+1}} = \\ &= 100 \text{ Tage} \cdot 10^{\frac{1}{1,4}} = 518 \text{ Tage} \end{aligned}$$

Verzehnfachung der Zuverlässigkeit nach 418 weiteren Tagen Reifedauer.



$t_{M0} = 100$  Tage,  $R(t_{M0}) = 10^5 \left[ \frac{DS}{MF} \right]$ ,  $K = 0,4$ ,  $\zeta_D = 0$ ,  $t_{V0} \ll t_{M0}$

b) *Welcher Vergrößerungsfaktor der Zuverlässigkeit ist nach einer Reifezeit von einem Jahr (365 Tage) zu erwarten?*

$$(2.44) \quad R_{MT}(t_M) = R_{MT}(t_{M0}) \cdot \left( \frac{t_M + t_{V0}}{t_{M0} + t_{V0}} \right)^{K+1}$$

Weiterhin Annahme  $R = R_F$ :

$$R(t_M) = R(t_{M0}) \cdot \left( \frac{t_M}{t_{M0}} \right)^{K+1}$$

$$\frac{R(365)}{R(100)} = \left( \frac{365}{100} \right)^{1,4} = 6,27$$

Nach insgesamt einem Jahr Reifedauer hat das System die 6,27-fache Zuverlässigkeit im Vergleich zur Bezugsreifedauer  $t_{M0}$ .



## Aufgabe 2.9: Reifedauer, Sicherheit

Der Exponent für die Abnahme der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit der Testsatzlänge liege im Bereich von  $K = 0,3 \dots 0,5$ . Die äquivalente Reifedauer vor dem Einsatz sei wieder gegenüber der Bezugsreifedauer  $t_{M0}$  vernachlässigbar. Die Fehlerbeseitigungswahrscheinlichkeit, dass ein Fehler, wenn er bei einem Anwender eine MF verursacht, beseitigt wird, soll sich nicht ändern und MF durch Störungen sei auch wieder vernachlässigbar.

$$K = 0,3 \dots 0,5, \zeta_D \ll \zeta_F, t_{V0} \ll t_{M0}.$$

- a) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer  $t_M$  gegenüber  $t_{M0}$  erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?*
- b) *Um welchen Faktor muss die Reifedauer  $t_M$  gegenüber  $t_{M0}$  erhöht werden, um die Sicherheit des Systems zu verzehnfachen?*

---

$K$	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).
$\zeta_D, \zeta_F$	Fehlfunktionsrate durch Störungen, Fehlfunktionsrate durch Fehler.
$t_{V0}$	Äquivalente Reifedauer vor Freigabe von Version null.
$t_{M0}$	Bezugsreifedauer.



$$K = 0,3 \dots 0,5, \zeta_D \ll \zeta_F, t_{V0} \ll t_{M0}.$$

- a) Um welchen Faktor muss die Reifedauer  $t_M$  gegenüber  $t_{M0}$  erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?

$$(2.40) \quad \mu_F(t_M) = \mu_F(t_{M0}) \cdot \left( \frac{t_M + t_{V0}}{t_{M0} + t_{V0}} \right)^{-K}$$

Wegen  $t_{V0} \ll t_M$  ist  $t_{V0}$  vernachlässigbar:

$$\frac{t_M}{t_{M0}} = \left( \frac{\mu_F(t_M)}{\mu_F(t_{M0})} \right)^{-\frac{1}{K}} = \frac{1}{10}^{-\frac{1}{K}} = 10^{\frac{1}{K}}$$

$K$	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_M}{t_{M0}}$	2154	316	100

Zur Verringerung der Anzahl der nicht beseitigten Fehler auf ein Zehntel muss die Reifedauer in Abhängigkeit von  $K$  auf das hundert bis mehr als 2.000-fache erhöht werden.

$\mu_F(t_M)$  Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in Abhängigkeit von der Reifedauer.



$$K = 0,3 \dots 0,5, \zeta_D \ll \zeta_F, t_{V0} \ll t_{M0}.$$

b) Um welchen Faktor muss die Reifedauer  $t_M$  gegenüber  $t_{M0}$  erhöht werden, um die Sicherheit des Systems zu verzehnfachen?

$$(2.44) \quad R_{MT}(t_M) = R_{MT}(t_{M0}) \cdot \left( \frac{t_M + t_{V0}}{t_{M0} + t_{V0}} \right)^{K+1}$$

$$(1.24) \quad S = \frac{R_{MT}}{\rho}$$

Aufgabe nur unter den idealisierten Annahme sinnvoll, dass die Reaktion auf erkannte Probleme Sicherheitsgefährdungen ausschließt, Störungen keine Rolle spielen ..., d.h.  $S \sim R$ :

$$\frac{S(t_M)}{S(t_{M0})} = \frac{R(t_M)}{R(t_{M0})} = 10 = \left( \frac{t_M}{t_{M0}} \right)^{K+1}$$

$$\frac{t_M}{t_{M0}} = 10^{1/(K+1)}$$

$K$	0,3	0,4	0,5
$\frac{t_M}{t_{M0}}$	5,88	5,18	4,64

Die zehnfache Sicherheit verlangt die 5 bis 6-fache Reifedauer. Viel geringere Abhängigkeit von  $K$  als in der Teilaufgabe zuvor.

$S$   
 $\rho$

Sicherheit (Safety or security).

Anteil sicherheitskritischer Fehlfunktionen an den nicht erkannten Fehlfunktionen.



# Fehlervermeidung



## Aufgabe 2.10: Nicht beseitigte Programmierfehler

*Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler in einem Programm mit  $10^5$  NLOC (Netto Lines of Code) bei einer Fehlerentstehungsrate von 40 Fehlern je 1000 NLOC, wenn der Test 80% der Fehler erkennt, erkannte Fehler beseitigt werden und bei der Fehlerbeseitigung keine neuen Fehler entstehen?*

---

$$C = 10^5 \text{ NLOC}, \xi = \frac{40 F}{1000 \text{ NLOC}}, FC = 80\%.$$

---

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
$C$	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
$\xi$	Fehlgenerierungsrate in zu erwartenden Fehlern je NLOC.
$FC$	Fehlerabdeckung (fault coverage), Anteil der nachweisbaren Fehler.
$[F]$	Zählwert in Fehlern.



$$C = 10^5 \text{ NLOC}, \xi = \frac{40 \text{ F}}{1000 \text{ NLOC}}, FC = 80\%.$$

$$(2.48) \quad \mu_{CF} = \xi_{\langle C \rangle} \cdot C$$

$$(2.1) \quad FC = \left. \frac{\#DF}{\#F} \right|_{ACR}$$

Zu erwartende Anzahl der entstehenden und nicht erkannten und damit auch nicht beseitigten Fehler:

$$\begin{aligned} \mu_F &= \xi \cdot C \cdot (1 - FC) \\ &= 10^5 \text{ NLOC} \cdot 40 \left[ \frac{\text{F}}{\text{NLOC}} \right] \cdot (1 - 80\%) = 800 \text{ [F]} \end{aligned}$$

Es entstehen 4000 Fehler, von denen 800 nicht erkannt und damit nicht beseitigt werden.



### Aufgabe 2.11: Fehlervermeidung

- a) *Warum wird für Entstehungsprozesse Determinismus angestrebt?*
- b) *Wie wird der Reparaturenerfolg bei nicht deterministischen Prozessen kontrolliert?*
- c) *Warum hat der Defektanteil von Produkten typischerweise einen sägezahnförmigen Verlauf über die Jahre, die das Produkt gefertigt wird?*



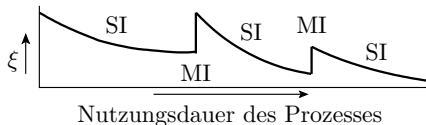
a) *Warum wird für Entstehungsprozesse Determinismus angestrebt?*

Determinismus ist Voraussetzung für die Erfolgskontrolle einer Fehlerbeseitigung durch Testwiederholung. Eine Erfolgskontrolle mit klarer ja/nein-Aussage ist die Voraussetzung für den Rückbau nach erfolglosen Fehlerbeseitigungsversuchen und die Fortsetzung der Prozessverbesserung mit den nächsten Fehlersymptomen.

b) *Wie wird der Reparatur Erfolg bei nicht deterministischen Prozessen kontrolliert?*

Bei nicht deterministischen Prozessen wird der Erfolg von Verbesserungen anhand von Erwartungswerten, Varianzen, Verteilungen, ... messbarer Produkteigenschaften kontrolliert. Verlangt statt einer Prozesswiederholung eine statistisch signifikante Anzahl von sehr vielen Wiederholungen.

- c) *Warum hat der Defektanteil von Produkten typischerweise einen sägezahnförmigen Verlauf über die Jahre, die das Produkt gefertigt wird?*



Bei der Einführung neuer Maschinen, Verfahren, ... kommen Fehler in den Prozess und erhöhen die Fehlerentstehungsrate. Mit der Prozessnutzung werden diese Fehler und Schwachstellen beseitigt, so dass die Fehlerentstehungsrate abnimmt, bis die nächste grosse Neuerung eingeführt wird. Neuerungen haben oft geringere störungsbedingte Fehlerentstehungsraten, so dass die Fehlerentstehungsrate und damit der Defektanteil über mehrere »Sägezähne« abnimmt.

$\xi$	Fehlerentstehungsrate.
MI	Große Innovationen (Major innovations).
SI	Kleine Verbesserungen (Small improvements).



# Wahrscheinlichkeiten



# Verkettete Ereignisse



## Aufgabe 3.1: Würfelexperimente

$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«. Bestimmen Sie für die nachfolgenden verketteten Ereignisse jeweils

- die möglichen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die günstigen Ergebnisse und deren Anzahl,
- und daraus die Eintrittswahrscheinlichkeit bei gleicher Auftrittshäufigkeit aller möglichen Ergebnisse.

---

$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

- Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis  $X + Y > 8$ ?*
- Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis  $X > Y$ ?*
- Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis  $(X = 5) \wedge (Y < 5)$ ?*
- Wahrscheinlichkeit, dass  $X \cdot Y$  durch drei teilbar ist?*

---

$X, Y$  Zufallsvariablen für Würfelerggebnisse.  
 $\mathbb{P}[\dots]$  Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses ...



$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

a) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis  $X + Y > 8$ ?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 3+6, 4+5, 4+6, 5+4, bis 5+6, 6+3 bis 6+6
- Anzahl günstig:  $1+2+3+4=10$

$$\mathbb{P}[X + Y > 8] = \frac{10}{36}$$



$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

b) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis  $X > Y$ ?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig:  $2 > 1$ ,  $3 > 1$ ,  $3 > 2$ ,  $4 > 1$  bis  $4 > 3$ ,  $5 > 1$  bis  $5 > 4$ ,  $6 > 1$  bis  $6 > 5$
- Anzahl günstig:  $1+2+3+4+5=15$

$$\mathbb{P}[X > Y] = \frac{15}{36}$$





$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

c) *Eintrittswahrscheinlichkeit Ereignis*  $(X = 5) \wedge (Y < 5)$ ?

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (5,1) bis (5,4)
- Anzahl günstig: 4

$$\mathbb{P}[(X = 5) \wedge (Y < 5)] = \frac{4}{36}$$



$X, Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augenzahl zweier Würfeln (Zufallsvariablen)

d) *Wahrscheinlichkeit, dass  $X \cdot Y$  durch drei teilbar ist?*

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (3,1) bis (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,1) bis (6,6), (1,6), (2,6), (4,6), (5,6)
- Anzahl günstig: 20

$$\mathbb{P}[(X \cdot Y) \% 3 = 0] = \frac{20}{36}$$

$a \% b$

Divisionsrest.



### Aufgabe 3.2: Verkettete Würfelereignisse

*Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »Würfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden« und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der Ergebnisse ein?*



Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »Würfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden« und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der Ergebnisse ein?

mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit je Ereignis
1 bis 5,	$6^{-1}$
6+1 bis 6+5	$6^{-2}$
6+6+1 bis 6+6+5	$6^{-3}$
...	...

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten:

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^3} + \dots \stackrel{\text{(SGS)}}{=} 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 6^{-i} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 \checkmark$$

SGS

Summe einer geometrischen Reihe:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$ .



### Aufgabe 3.3: Fehlfunktionen durch Fehler

Ein System habe vier Fehler, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 10\%$ ,  $p_2 = 20\%$ ,  $p_3 = 5\%$  und  $p_4 = 1\%$  als Service-Leistung eine Fehlfunktion liefern.

---

$$p_1 = 10\%, p_2 = 20\%, p_3 = 5\%, p_4 = 1\%$$

- Wie hoch ist die MF-Rate durch Fehler als Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der vier Fehler eine MF verursacht?*
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass hintereinander zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?*
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht jeder der vier Fehler mindestens eine Fehlerfunktion bei 10 Service-Leistungen?*



$$p_1 = 10\%, p_2 = 20\%, p_3 = 5\%, p_4 = 1\%$$

---

Hilfestellung: Verwenden Sie folgende Ereignisdefinitionen:

- $F_{i,j}$  Fehler  $i$  verursachen MF bei DS  $j$ ,  $\mathbb{P}[F_{i,j}] = p_i$
- $A_j$  mindestens 1 MF durch einen der 4 Fehler bei DS  $j$
- $B$  keine MF durch einen der 4 Fehler bei einer der 10 DS
- $C$  jeder Fehler  $i$  mindestens eine MF bei einer der 10 DS

---

DS	Erbrachte Service-Leistung.
MF	Fehlfunktion (Malfunction).
$p_i$	Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler $i$ .



$$p_1 = 10\%, p_2 = 20\%, p_3 = 5\%, p_4 = 1\%$$

a) *Wie hoch ist die MF-Rate durch Fehler als Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der vier Fehler eine MF verursacht?*

$$(3.4) \quad \mathbb{P}[\bar{A}] = 1 - \mathbb{P}[A]$$

$$(3.5) \quad \mathbb{P}[A \wedge B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_j$ , dass mindestens einer der 4 Fehler eine MF bei DS  $j$  verursacht:

$$\begin{aligned} A_j &= F_{1.j} \vee F_{2.j} \vee F_{3.j} \vee F_{4.j} \\ A_j &= \overline{F_{1.j} \bar{F}_{2.j} \bar{F}_{3.j} \bar{F}_{4.j}} \\ \mathbb{P}[A_j] &= 1 - \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \\ &= 1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,95 \cdot 0,99 = 23,3\% \end{aligned}$$



$$p_1 = 10\%, p_2 = 20\%, p_3 = 5\%, p_4 = 1\%$$

b) *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass hintereinander zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?*

$$\begin{aligned} B &= \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{10} \\ \mathbb{P}[B] &= (1 - \mathbb{P}[A_j])^{10} \\ &= \left( \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \right)^{10} = 2\% \end{aligned}$$





$$p_1 = 10\%, p_2 = 20\%, p_3 = 5\%, p_4 = 1\%$$

c) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht jeder der vier Fehler mindestens eine Fehlerfunktion bei 10 Service-Leistungen?*

$$\begin{aligned} C &= (F_{1.1} \vee \dots \vee F_{1.10}) \wedge (F_{2.1} \vee \dots \vee F_{2.10}) \wedge \dots \wedge (F_{4.1} \vee \dots \vee F_{4.10}) \\ &= \overline{(\bar{F}_{1.1} \wedge \dots \wedge \bar{F}_{1.10})} \wedge \overline{(\bar{F}_{2.1} \wedge \dots \wedge \bar{F}_{2.10})} \wedge \dots \wedge \overline{(\bar{F}_{4.1} \wedge \dots \wedge \bar{F}_{4.10})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[C] = \prod_{i=1}^4 1 - (1 - p_i)^{10}$$

$p_i$	10%	20%	5%	1%	$\mathbb{P}[C]$
$1 - (1 - p_i)^{10}$	65,1%	89,3%	40,1%	9,6%	2,24%



## Aufgabe 3.4: Gewichteter Zufallstest

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung  $\mathbf{x} = 11111110_2$  ist, wenn

- a) *für alle Bitwerte  $x_i$  zufällig und unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit  $g = 50\%$  bzw.  $60\%$  der Wert eins und sonst null gewählt wird?*
- b) *in Abweichung zu Aufgabenteil a für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Bitwert gewählt wird?*

---

$g(\dots)$       Wichtung, Auftrittshäufigkeit des Signalwerts 1.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung  $\mathbf{x} = 11111110_2$  ist, wenn

- a) für alle Bitwerte  $x_i$  zufällig und unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit  $g = 50\%$  bzw.  $60\%$  der Wert eins und sonst null gewählt wird?

Beschreibung der Auswahl der Bitwerte  $x_i = 1$  durch Ereignisse  $G_i$  mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten  $g_i$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_7 \wedge G_6 \wedge G_5 \wedge G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}[\mathbf{x} = 11111110_2] &= g^7 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

$g$	50%	60%
$G_4$ bis $G_7$ unabhängig	$2^{-8} = 0,4\%$	$0,6^7 \cdot 0,4 = 1\%$

$g(\dots)$  Wichtung, Auftrittshäufigkeit des Signalwerts 1.  
 $G_i$  Ereignis Bit  $i$  gleich eins.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 8-Bit-Vektor einer Service-Anfrage an eine Schaltung  $\mathbf{x} = 11111110_2$  ist, wenn

b) *in Abweichung zu Aufgabenteil a für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Bitwert gewählt wird?*

Für  $G_7 = G_6 = G_5 = G_4$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 11111110_2 &= G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ \mathbb{P}[\mathbf{x} = 11111110_2] &= g^4 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

$g$	50%	60%
$G_4$ bis $G_7$ unabhängig	$2^{-8} = 0,4\%$	$0,6^7 \cdot 0,4 = 1\%$
$G_7 = G_6 = G_5 = G_4$	$2^{-5} = 3\%$	$0,6^4 \cdot 0,4 = 5\%$



# Fehlerbaum

### Aufgabe 3.5: Fehlerbaumanalyse

Ereignis  $R_1$  tritt ein, wenn entweder  $B_1$  und nicht  $B_2$  oder nicht  $B_1$  und  $B_2$  eintritt. Ereignis  $R_2$  tritt ein, wenn  $R_1$  und  $B_3$  eintreten.

Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse:  $p_{B_1} = 2\%$ ,  $p_{B_2} = 10\%$ ,  
 $p_{B_3} = 5\%$ .

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*

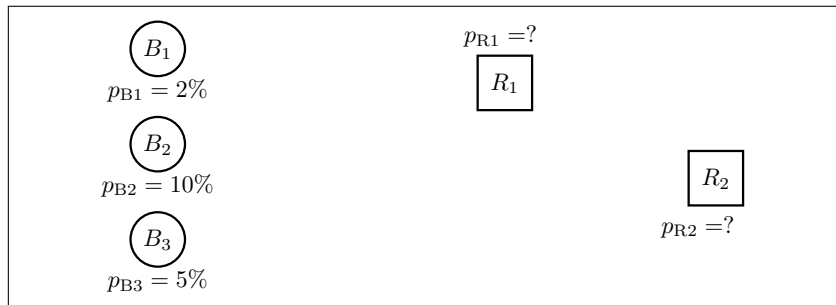
b) *Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse  $R_1$  und  $R_2$ ?*



Ereignis  $R_1$  tritt ein, wenn entweder  $B_1$  und nicht  $B_2$  oder nicht  $B_1$  und  $B_2$  eintritt. Ereignis  $R_2$  tritt ein, wenn  $R_1$  und  $B_3$  eintreten.

Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse:  $p_{B_1} = 2\%$ ,  $p_{B_2} = 10\%$ ,  
 $p_{B_3} = 5\%$ .

a) *Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?*

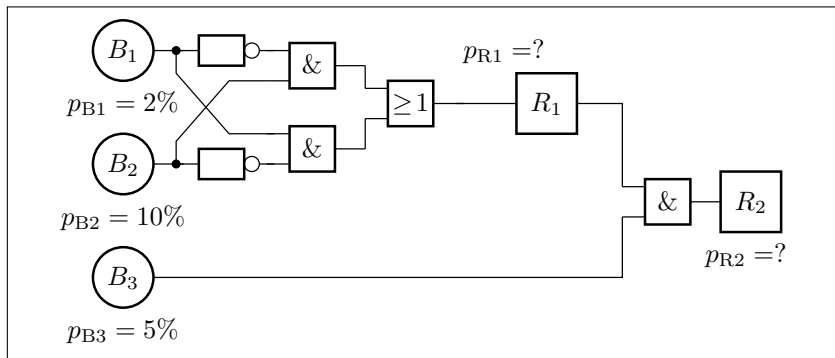




Ereignis  $R_1$  tritt ein, wenn entweder  $B_1$  und nicht  $B_2$  oder nicht  $B_1$  und  $B_2$  eintritt. Ereignis  $R_2$  tritt ein, wenn  $R_1$  und  $B_3$  eintreten.

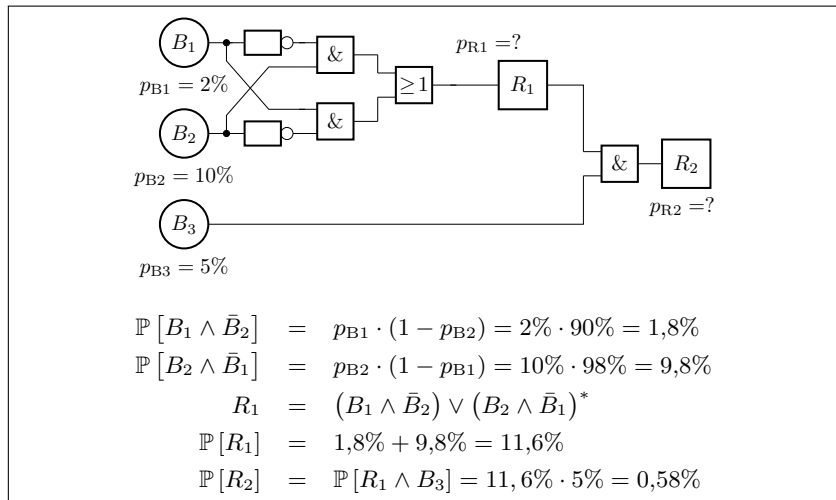
Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse:  $p_{B_1} = 2\%$ ,  $p_{B_2} = 10\%$ ,  
 $p_{B_3} = 5\%$ .

a) Beschreiben Sie den Sachverhalt als Fehlerbaum?





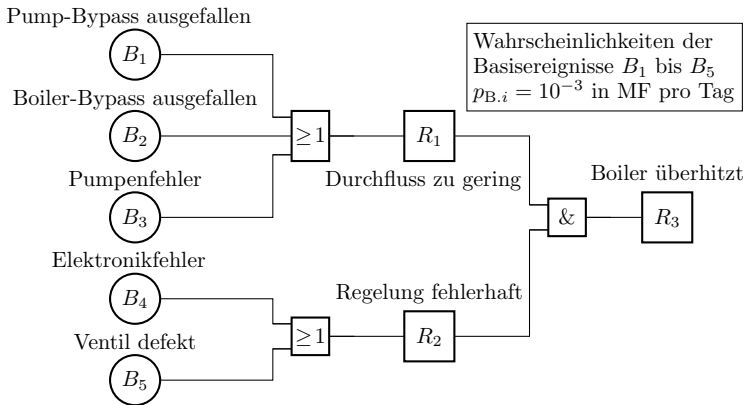
b) Welche Wahrscheinlichkeiten haben die Ereignisse  $R_1$  und  $R_2$ ?



\*  $B_1 \wedge \bar{B}_2$  und  $B_2 \wedge \bar{B}_1$  schließen sich gegenseitig aus.



## Aufgabe 3.6: Fehlerbaumauswertung



Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten  $p_{R1}$  bis  $p_{R3}$  der Fehlerereignisse  $R_1$  bis  $R_3$  pro Tag?

Pump-Bypass ausgefallen



Boiler-Bypass ausgefallen



Pumpenfehler



Elektronikfehler



Ventil defekt



Durchfluss zu gering



Regelung fehlerhaft



Boiler überhitzt



Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_5$   
 $p_{B.i} = 10^{-3}$  in MF pro Tag

$$R_1 = B_1 \vee B_2 \vee B_3 = \overline{\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge \overline{B_3}}$$

$$p_{R1} = 1 - (1 - \mathbb{P}[B_1]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_2]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_3])$$

$$\approx \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[B_3] = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Tag}^{-1}$$

Pump-Bypass ausgefallen



Boiler-Bypass ausgefallen



Pumpenfehler



Elektronikfehler



Ventil defekt



Durchfluss zu gering



Regelung fehlerhaft



Boiler überhitzt



Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_5$   
 $p_{B.i} = 10^{-3}$  in MF pro Tag

$$R_2 = B_4 \vee B_5 = \overline{\overline{B_4} \wedge \overline{B_5}}$$

$$p_{R2} = 1 - (1 - \mathbb{P}[B_4]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_5]) \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Tag}^{-1}$$

$$R_3 = R_1 \wedge R_2$$

$$p_{R3} = p_{R1} \cdot p_{R2} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Tag}^{-1}$$



# Markov-Ketten



### Aufgabe 3.7: Wettervorhersage mit Markov-Kette

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen  $R$  – »Regen« und  $S$  – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

Zustände:  $R$  (Regen, Anfangszustand),  $S$  (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten:  $p_{RR} = 75\%$ ,  $p_{SS} = 80\%$

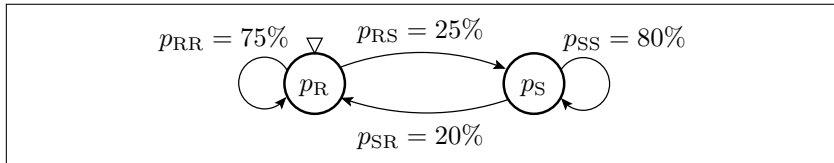
- Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?
- Aufstellen der Übergangsfunktion?
- Wenn es am Tag  $i = 0$  regnet, wie groß ist für die Tage  $i = 1$  bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?

---

$n$	Schrittnummer der Simulation der Markov-Kette.
$p_R$	Zustand Regen.
$p_S$	Zustand Sonnenschein.
$p_{ij}$	Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $i$ nach Zustand $j$ mit $i, j \in \{R, S\}$ .

Zustände:  $R$  (Regen, Anfangszustand),  $S$  (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten:  $p_{RR} = 75\%$ ,  $p_{SS} = 80\%$

a) *Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«*



b) *Aufstellen der Übergangsfunktion?*

$$\begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 \\ 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_n$$



Zustände:  $R$  (Regen, Anfangszustand),  $S$  (Sonne), Übergangswahrscheinlichkeiten:  $p_{RR} = 75\%$ ,  $p_{SS} = 80\%$

$$\begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 \\ 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_n$$

c) *Wenn es am Tag  $i = 0$  regnet, wie groß ist für die Tage  $i = 1$  bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?*

Tag	0	1	2	3	4
$p_R$	1	0,75	0,6125	0,53687	0,49528
$p_S$	0	0,25	0,3875	0,46313	0,50472





## Aufgabe 3.8: Risikoanalyse

Eine schwerwiegende Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand  $B$  nacheinander in höhere Risikozustände  $R_1$  bis  $R_4$  übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand  $B$ ). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand  $R_4$  tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation  $F$  ein.

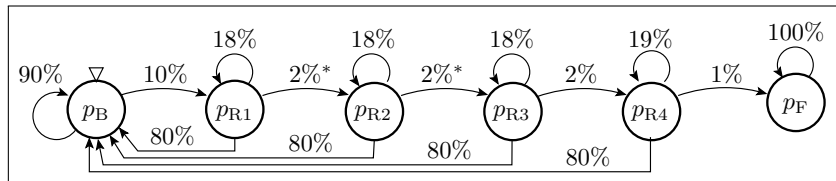
- Beschreibung als Markov-Kette?*
- Programm zur Simulation der Markov-Kette?*
- Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für  $n = 1$  bis 7 und  $n = 10^6$ ?*

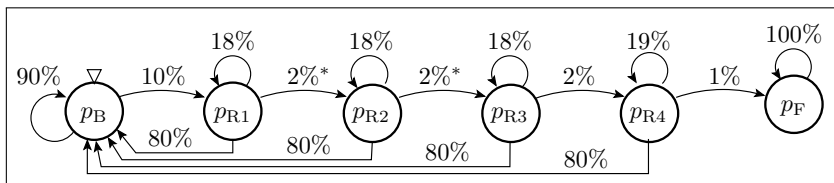
---

$p_B$	Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Grundzustand befindet.
$p_{R_i}$	Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Risikozustands $R_i$ befindet.
$p_F$	Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation eingetreten ist.

Eine schwerwiegende Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand  $B$  nacheinander in höhere Risikozustände  $R_1$  bis  $R_4$  übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand  $B$ ). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand  $R_4$  tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation  $F$  ein.

a) *Beschreibung als Markov-Kette?*

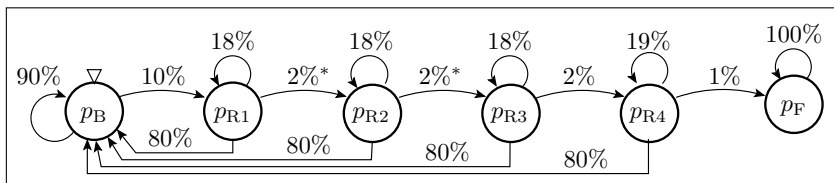




b) Programm zur Simulation der Markov-Kette?

```

PB = 100; PR1 = 0; PR2=0; PR3=0; PR4=0; PF=0;
print(' n|  P_G|   PR1|   PR2|   PR3|   PR4 |   PF');
for n in range(1,8):
    PB_n = PB*0.9 + PR1*0.8 + PR2*0.8 + PR3*0.8 + PR4*0.8;
    PR1_n = PB*0.10 + PR1*0.18;
    PR2_n = PR1*0.02 + PR2*0.18;
    PR3_n = PR2*0.02 + PR3*0.18;
    PR4_n = PR3*0.02 + PR4*0.19;
    PF = PR4*0.01 + PF;
    PB=PB_n; PR1=PR1_n; PR2=PR2_n; PR3=PR3_n; PR4=PR4_n;
    print('%3i|%6.3f| %6.3f|%6.3f|%6.3f|%8.6f|%8.6f' %(n,
        PB, PR1, PR2, PR3, PR4, PF))
  
```



c) *Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für  $n = 1$  bis  $7$  und  $n = 10^6$ ?*

$n$	$p_B$	$p_{R1}$	$p_{R2}$	$p_{R3}$	$p_{R4}$	$p_F$
1	90,000%	10,000%	0,000%	0,000%	0,000000%	0,000000%
2	89,000%	10,800%	0,200%	0,000%	0,000000%	0,000000%
3	88,900%	10,844%	0,252%	0,004%	0,000000%	0,000000%
4	88,890%	10,842%	0,260%	0,006%	0,000080%	0,000000%
5	88,889%	10,841%	0,264%	0,006%	0,000130%	0,000001%
6	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000150%	0,000002%
7	88,889%	10,840%	0,264%	0,006%	0,000157%	0,000004%
$10^6$	87,485%	10,669%	0,260%	0,006%	0,000157%	1,579632%



# Fehlernachweis



### Aufgabe 3.9: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

- Wie hoch sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$  für die beiden lokalisierbaren Fehler?*
- Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare lokalisierbare Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?*
- Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden lokalisierbaren Fehler beseitigt sind?*

---

MF                      Fehlfunktion (Malfunction).  
 $p_i$                       Nachweiswahrscheinlichkeit Fehler  $i$ .



Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

a) *Wie hoch sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$  für die beiden lokalisierbaren Fehler?*

Die Nachweiswahrscheinlichkeiten sind die vorgegebenen Fehlfunktionsraten:

$$p_1 = \zeta_1 = 0,7 \cdot 10^{-4}$$

$$p_2 = \zeta_2 = 0,2 \cdot 10^{-4}$$

$\zeta_i$  Fehlfunktionsrate von Fehler  $i$  (Malfunction rate of fault  $i$ ).



Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

b) *Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare lokalisierbare Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?*

$$(3.9) \quad p_{\text{FD}}(\zeta, N) = 1 - e^{-\zeta \cdot N}$$

Schlechter nachweisbar ist Fehler 2 mit:

$$\zeta_2 = 0,2 \cdot 10^{-4}$$

Erforderliche Testsatzlänge für den 99%igen Nachweis:

$$\begin{aligned} p_2(N) &= 1 - e^{-n \cdot \zeta_2} \geq 99\% \\ N &\geq -\frac{\ln(1 - 99\%)}{p_2} = 2,3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$





Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der MF verursacht ein erster Fehler, 20% ein zweiter Fehler und die restlichen 10% nicht lokalisierbare Fehler oder Störungen.

c) *Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden lokalisierbaren Fehler beseitigt sind?*

$$(1.9) \quad \zeta_{[MT]} = \frac{1}{R_{[MT]}} = \frac{\#NDM}{\#DS} \Big|_{ACR}$$

Die beiden Fehler verursachen 90% der MF. Ihre Beseitigung verringert die Häufigkeit der MF auf 10%, also im Mittel auf jede  $10^5$ -ten Service-Leistung:

$$\zeta = 10^{-5} \left[ \frac{MF}{DS} \right]$$

Zuverlässigkeit als Kehrwert der MF-Rate:

$$R = 10^5 \left[ \frac{DS}{MF} \right]$$

$R$

$\left[ \frac{MF}{DS} \right]$

$\left[ \frac{DS}{MF} \right]$

Zuverlässigkeit (Reliability).

Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.

Zählwertverhältnis in erbrachten Service-Leistungen je Fehlfunktion.



### Aufgabe 3.10: Testsatzlänge RAM-Test

Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

- Ab welcher Testsatzlänge  $N$  in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit  $\geq 99\%$ ?*
- Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei  $10^8$  Speicherzugriffen pro Sekunde?*

---

 $N$ 

Anzahl der Tests.



Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

a) *Ab welcher Testsatzlänge  $N$  in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit  $\geq 99\%$ ?*

$$(3.9) \quad p_{\text{FD}}(\zeta, N) = 1 - e^{-\zeta \cdot N}$$

Untere Schranke der Fehlfunktionsrate je Speicherzugriff:

$$\zeta_{\min} = (50 \cdot 2^{32})^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei  $N$  Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(N) = 1 - e^{-n \cdot \zeta_{\min}} \geq 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$N \geq -\ln(1 - 99\%) \cdot \frac{1}{p_{\min}} = -\ln(1\%) \cdot 50 \cdot 2^{32} \approx 10^{12}$$



Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine Fehlfunktion verursacht.

b) *Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei  $10^8$  Speicherzugriffen pro Sekunde?*

Mindesttestdauer:

$$\begin{aligned}t &= N \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ &= 10^{12} \cdot 10^{-8} \text{ s} = 2,75 \text{ h}\end{aligned}$$

- $p_{\text{FD}}(\zeta, N)$  Nachweiswahrscheinlichkeit des Fehlers mit  $N$  Tests.
- $\zeta_{\text{min}}$  Mindestfehlfunktionsrate der unterstellten Fehler.
- $p_{\text{min}}$  Mindestnachweiswahrscheinlichkeit der unterstellten Fehler.



## Aufgabe 3.11: RAM-Kopplungsfehler

Schreiben einer 1 in Zelle  $i$  verändert Zelle  $j$  von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

- Schreibe 0 in Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Schreibe 1 in Zelle  $i$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Lese Zelle  $j$  ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}$ .

$$p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}, p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A} \text{ und } p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}.$$

- Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?*
- MF-Rate  $\zeta_{CP}$  des Fehlers als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlernachweis in Schritt  $N$ , wenn bis Schritt  $N - 1$  noch nicht nachweisbar?*

---

$\#A$	Anzahl der Adressen.
$\zeta_{CP}$	Fehlfunktionsrate des RAM-Kopplungsfehlers.
$N$	Anzahl der Tests.



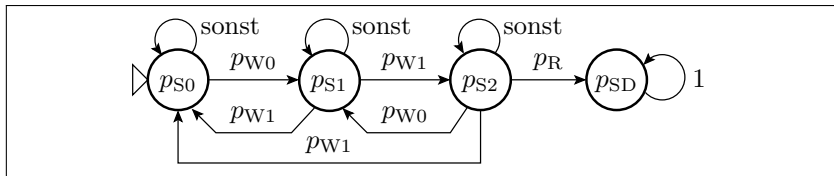
$$p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}, p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A} \text{ und } p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}.$$

- c) *Simulationsprogramm mit  $\#A = 128$  für  $N = 1$  bis 5000?*
- d) *Darstellung der MF-Rate und Abschätzung der Anzahl der Initialisierungsschritte, bis sich eine konstante MF-Rate einstellt.*

$p_{W0}$	Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 in die Speicherzelle geschrieben wird.
$p_{W1}$	Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 in die Speicherzelle geschrieben wird.
$p_R$	Wahrscheinlichkeit, dass die Speicherzelle gelesen wird.

$$p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}, p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A} \text{ und } p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}.$$

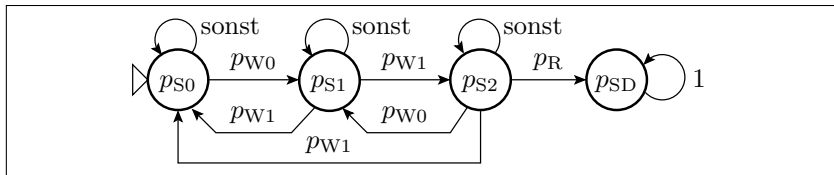
a) *Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?*



- $p_{S_i}$       Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand  $S_i$  ist.
- $p_{SD}$       Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette im Zustand »Fehler nachgewiesen« ist.



$$p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}, p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A} \text{ und } p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}.$$



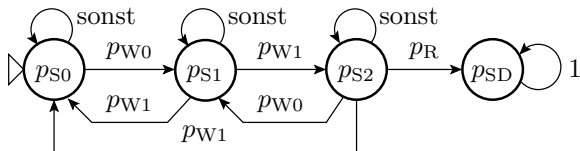
- b) MF-Rate  $\zeta_{CP}$  des Fehlers als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlernachweis in Schritt  $N$ , wenn bis Schritt  $N - 1$  noch nicht nachweisbar?

$$\zeta_{CP}(N+1) = \frac{p_{SD}(N+1) - p_{SD}(N)}{1 - p_{SD}(N)}$$

Vermeidung numerischer Probleme durch kleiner Differenzen großer Zahlen:

$$\zeta_{CP}(N+1) = \frac{p_{S2}(N) \cdot p_R}{p_{S0}(N) + p_{S1}(N) + p_{S2}(N)}$$





c) *Simulationsprogramm mit #A = 128 für N = 1 bis 5000?*

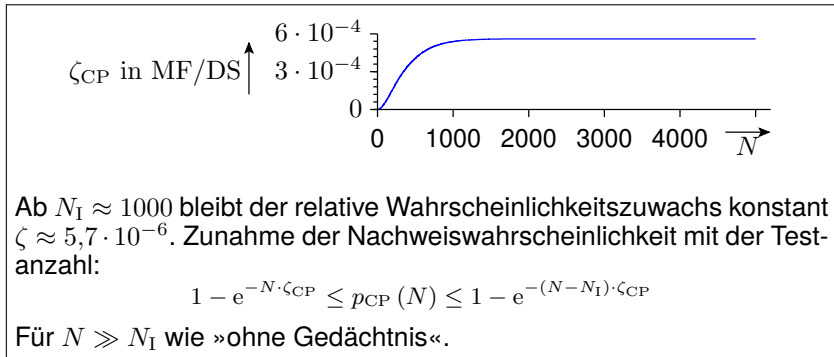
```

pS0=1; pS1=0; pS2=0; pSD(1)=0;
A=128; pR = 1/(2*A); pW = 1/(4*A);
for N = 5000;
    pS0_nxt = pS0 * (1-pW) + pS1*pW + pS2*pW;
    pS1_nxt = pS0 * pW + pS1*(1-pW-pR) + pS2*pW;
    pS2_nxt = pS1 * pR + pS2*(1-2*pW-pR);
    pSD = pSD(n) + pS2 * pR;
    zeta_CP(N) = pS2*pR / (pS0+pS1+pS2);
    pS0=pS0_nxt; pS1=pS1_nxt; pS2=pS2_nxt;
end;
plot(1:5000, zeta_CP);
  
```



$$p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}, p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A} \text{ und } p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}.$$

d) Darstellung der MF-Rate und Abschätzung der Anzahl der Initialisierungsschritte, bis sich eine konstante MF-Rate einstellt.



$N_I$

Anzahl der Initialisierungsschritte.

$p_{CP}(N)$

Nachweiswahrscheinlichkeit des RAM-Kopplungsfehler als Funktion der Testanzahl  $N$ .



# Fehlerbeseitigung



### Aufgabe 3.12: Defektanteil nach Ersatz

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $Y = 60\%$  und der Test erkennt  $DC = 90\%$  der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

- a) *Wie groß ist der Defektanteil  $DL_M$  der Geräte nach der Fertigung?*
- b) *Wie hoch ist der zu erwartende Defektanteil  $DL$  nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?*

---

$Y$	Ausbeute (Yield).
$DC$	Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.
$DL_M$	Defektanteil der Fertigung vor Aussortieren der erkannten defekten Produkte.
$DL$	Defektanteil nach Aussortieren oder Ersatz erkannter defekter Produkte.



Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $Y = 60\%$  und der Test erkennt  $DC = 90\%$  der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) *Wie groß ist der Defektanteil  $DL_M$  der Geräte nach der Fertigung?*

$$(2.6) \quad Y = 1 - DL_M \cdot DC$$

$$DL_M = \frac{1 - Y}{DC} \approx \frac{1 - 60\%}{90\%} = 44,4\% = 0,444 \text{ dpu}$$

dpu      Anteil der fehlerhaften Objekte (defecs per unit).



Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $Y = 60\%$  und der Test erkennt  $DC = 90\%$  der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

b) *Wie hoch ist der zu erwartende Defektanteil  $DL$  nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?*

$$(2.7) \quad DL = \frac{DL_M \cdot (1 - DC)}{1 - DL_M \cdot DC}$$

$$\begin{aligned} DL &= \frac{44,4\% \cdot (1 - 90\%)}{1 - 44,4\% \cdot 90\%} \\ &= 0,074 \text{ dpu} = 74.000 \text{ dpm} \end{aligned}$$

Etwa noch jedes 14. Gerät ist fehlerhaft.

dpm      Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).



### Aufgabe 3.13: Defektabdeckung Deckung Schaltkreistest

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL = 1000$  dpm.

- a) *Auf welche Defektabdeckung  $DC$  der Tests lässt das schließen?*
- b) *Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf  $Y = 30\%$  durch eine technologische Umstellung auf den Defektanteil der gefertigten Schaltkreise aus?*

---

$Y$	Ausbeute (Yield).
$DL$	Defektanteil nach Aussortieren oder Ersatz erkannter defekter Produkte.
dpm	Anzahl der defekten Produkte von einer Million (defecs per million).
$DC$	Defektabdeckung (defect coverage), Anteil der erkennbar defekten Produkte.



Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL = 1000$  dpm.

a) *Auf welche Defektabdeckung  $DC$  der Tests lässt das schließen?*

$$(2.8) \quad DL = \frac{(1-Y) \cdot (1-DC)}{Y \cdot DC}$$

$$\begin{aligned} DC &= \frac{1 - Y}{DL \cdot DC + 1 - Y} \\ &= \frac{1 - 80\%}{10^{-3} \cdot 80\% + 1 - 80\%} = 99,6\% \end{aligned}$$

Ist eine so hohe Defektabdeckung für Schaltkreise realistisch oder beziehen sich die Angaben zum Defektanteil auf den viel geringeren Anteil der von Geräteherstellern reklamierten Schaltkreise mit nachweisbaren Fertigungsfehlern?





Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Defektanteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL = 1000$  dpm.

b) *Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf  $Y = 30\%$  durch eine technologische Umstellung auf den Defektanteil der gefertigten Schaltkreise aus?*

$$(2.8) \quad DL = \frac{(1-Y) \cdot (1-DC)}{Y \cdot DC}$$

Defektabdeckung aus Aufgabenteil a  $DC = 99,6\%$ . Anstieg des Defektanteil der getesteten Bauteile auf:

$$DL = \frac{(1 - 30\%) \cdot (1 - 99,6\%)}{99,6\% \cdot 30\%} = 9,3 \cdot 10^{-3} \gg 1000 \text{ DPM}$$

Ein Ausbeuteeinbruch von 80% auf 30% bewirkt, dass sich der Defektanteil der getesteten und ausgelieferten Schaltkreise fast verzehnfacht.



## Aufgabe 3.14: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (1)

Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von 60%.

$$\mu_{CF} = 20, p_{FD} = p_{FD} = 60\%$$

- a) *Wie groß darf die Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler  $\eta_{RF}$  maximal sein, damit sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mindestens halbiert?*
- b) *Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate  $\xi_R$  (neu entstehende Fehler je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur  $p_R = 30\%$  beträgt?*

---

$\mu_{CF}$	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
$p_{FE}$	Fehlernachweis- und Beseitigungswahrscheinlichkeit.
$\eta_{RF}$	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener Fehler.
$p_R$	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
$\xi_R$	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je Reparaturversuch.
$p_R$	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.



$$\mu_{CF} = 20, p_{FD} = p_{FD} = 60\%$$

a) *Wie groß darf die Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler  $\eta_{RFR}$  maximal sein, damit sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mindestens halbiert?*

$$(3.27) \quad \mu_F = \mu_{CF} \cdot (1 - p_{FE}) \cdot (1 + \eta_{RFR})$$

$$(3.25) \quad \eta_{RFR} = p_{FE} \cdot \eta_{RER} = p_{FE} \cdot \left( \frac{\eta_{RE}}{1 - \eta_{RE}} \right) \text{ für } \eta_{RE} < 1$$

mindestens Halbierung:

$$\frac{\mu_F}{\mu_{CF}} = \frac{(1 - p_{FD}) \cdot \mu_{CF}}{1 - \eta_{RFR}} \leq 0,5; \quad \eta_{RFR} \leq 1 - 2 \cdot (1 - p_{FD}) = 1 - 2 \cdot (1 - 60\%) = 20\%$$

neue Fehler je ursprünglicher Fehler. Aufgelöst nach der Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler:

$$\eta_{RE} \leq 1 - \frac{1}{\frac{\eta_{RFR}}{p_{FE}} + 1} = 1 - \frac{1}{\frac{0,2}{0,6} + 1} = 0,25$$



$$\mu_{CF} = 20, p_{FD} = p_{FD} = 60\%$$

b) *Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate  $\xi_R$  (neu entstehende Fehler je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur  $p_R = 30\%$  beträgt?*

$$(3.23) \quad \eta_{RE} = \frac{\eta_{RF}}{p_{FE}} = \frac{\xi_R}{p_R} < 1$$

Anzahl der neu entstehenden Fehler je vorhandener Fehler nach Aufgabenteil a:

$$\eta_{RE} \leq 0,25$$

$$\xi_R = \eta_{RE} \cdot p_R \leq 0,25 \cdot 30\% = 7,5\%$$

Im Mittel nicht mehr als 7,7 Fehler bei 100 Reparaturversuchen.



## Aufgabe 3.15: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (2)

Der Test eines Programms erkennt 95% der 100 entstandenen Fehler. Die Beseitigung eines erkannten Fehler erfordert im Mittel 5 Reparaturversuche und bei 30 Reparaturversuchen entsteht im Mittel 1 neuer Fehler.

$$\mu_{CF} = 100, p_{FD} = p_{FE} = 95\%, p_R = 1/5, \xi_R = 1/30$$

- a) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler  $\mu_F$ ?*
- b) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler  $\mu_F$ , wenn der Verzicht auf Rückbau die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch auf 10% verdreifacht?*

---

$\mu_{CF}$	Zu erwartende Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.
$p_{FE}$	Fehlernachweis- und Beseitigungswahrscheinlichkeit.
$p_R$	Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur.
$\xi_R$	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je Reparaturversuch.
$\mu_F$	Zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.



$$\mu_{CF} = 100, p_{FD} = p_{FE} = 95\%, p_R = 1/5, \xi_R = 1/30$$

a) Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler  $\mu_F$ ?

$$(3.26) \quad \eta_{RFR} = p_{FE} \cdot \left( \frac{\xi_R}{p_R - \xi_R} \right) \text{ für } p_R > \xi_R$$

$$(3.27) \quad \mu_F = \mu_{CF} \cdot (1 - p_{FE}) \cdot (1 + \eta_{RFR})$$

Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{RFR} = \frac{95\% \cdot 0,2}{0,2 - 1/30} - 95\% = 0,13$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler

$$\mu_F = 100 \cdot (1 - 95\%) \cdot (1 + 0,13) = 5,65$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 0,65 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler.

 $\eta_{RFR}$ 

Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener ursprünglicher Fehler.



$$\mu_{CF} = 100, p_{FD} = p_{FE} = 95\%, p_R = 1/5, \xi_R = 1/30$$

b) *Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler  $\mu_F$ , wenn der Verzicht auf Rückbau die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch auf 10% verdreifacht?*

$$(3.26) \quad \eta_{RFR} = p_{FE} \cdot \left( \frac{\xi_R}{p_R - \xi_R} \right) \quad \text{für } p_R > \xi_R$$

$$(3.27) \quad \mu_F = \mu_{CF} \cdot (1 - p_{FE}) \cdot (1 + \eta_{RFR})$$

Zu erwartende Anzahl der neu entstehenden Fehler je beseitigter Fehler:

$$\eta_{RFR} = \frac{95\% \cdot 0,2}{0,2 - 0,1} - 95\% = 1,9$$

Zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler

$$\mu_F = 100 \cdot (1 - 95\%) \cdot (1 + 1,9) = 14,5$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 9,5 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler.



# Reifeprozess





## Aufgabe 3.16: Reifeprozess mit neu entstehenden Fehlern

### Fehleranzahl und MF-Rate Vorlesungsbeispiel 3.3

$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

		$\mu_F(u, v)$					$\zeta_F(u, v)$		
$u$		0	1	2	$u$		0	1	2
$v = 0$		100	38,32	29,59	$v = 0$		$4 \cdot 10^{-4}$	$1,39 \cdot 10^{-5}$	$5,64 \cdot 10^{-6}$
$v = 1$		0	6,17	2,36	$v = 1$		0	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$8,59 \cdot 10^{-7}$
$v = 2$		0	0	1,25	$v = 2$		0	0	$5,02 \cdot 10^{-6}$
$\mu_F(u)$		100	44,49	33,21	$\zeta_F(u)$		$4 \cdot 10^{-4}$	$3,86 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$

- a) *Um wie viele Prozent erhöht die Fehlerentstehungsrate  $\eta_{RFR} = 0,1$  neue je beseitigter Fehler die Anzahl der nicht beseitigten Fehler?*

$\mu_F(0, 0)$	Erwartete Anzahl Fehler in Version 0 (erste freigegebene Version).
$N_{V0}$	Effektive Testanzahl von Version 0, d.h. der Fehlerbeseitigungsiteration vor dem Einsatz.
$N_{MV}$	Erhöhung der effektive Testanzahl mit jeder Version.
$\eta_{RFR}$	Fehlerentstehungsrate in neue Fehler je vorhandener ursprünglicher Fehler.
$K$	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).
$u, v$	Versionnummern und Bezugsversionsnummer des reifenden Objekts.



$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

		$\mu_F(u, v)$					$\zeta_F(u, v)$		
$u$		0	1	2	$u$		0	1	2
$v = 0$		100	38,32	29,59	$v = 0$		$4 \cdot 10^{-4}$	$1,39 \cdot 10^{-5}$	$5,64 \cdot 10^{-6}$
$v = 1$		0	6,17	2,36	$v = 1$		0	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$8,59 \cdot 10^{-7}$
$v = 2$		0	0	1,25	$v = 2$		0	0	$5,02 \cdot 10^{-6}$
$\mu_F(u)$		100	44,49	33,21	$\zeta_F(u)$		$4 \cdot 10^{-4}$	$3,86 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$

- b) *Warum verdoppelt eine Fehlerentstehungsrate  $\eta_{RFR} = 0,1$  neue je beseitigter Fehler etwa die MF-Rate?*
- c) *Neuberechnung der Tabellen für den halben Testaufwand vor Versionsfreigabe auf  $N_T = 5 \cdot 10^4$ . Welchen Einfluss hat das auf die Anzahl der nicht beseitigten Fehler und die MF-Rate durch diese?*

$\mu_F(u, v)$	Zu erwartende Fehleranzahl in Version $u$ , die in Version $v$ entstanden sind.
$\mu_F(u)$	Zu erwartende Fehleranzahl in Version $u$ .
$\zeta_F(u, v)$	MF-Rate in Version $u$ verursacht von Fehlern die in Version $v$ entstanden sind.
$\zeta_F(u)$	Gesamte Fehlfunktionsrate in Version $u$ .



$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

a) Um wie viele Prozent erhöht die Fehlerentstehungsrate  $\eta_{RFR} = 0,1$  neue je beseitigter Fehler die Anzahl der nicht beseitigten Fehler?

$$(3.32) \quad p_{NE}(u-v) = \frac{\mu_F(u,v)}{\mu_F(u-1,v)} = \left( \frac{u-v+u_{V0}}{u-v-1+u_{V0}} \right)^{-K}$$

$$\begin{aligned} p_{NE}(1,0) = p_{NE}(2,1) &= \left( \frac{N_{MV} + N_T}{N_T} \right)^{-K} = 38,32\% \\ p_{NE}(2,0) &= \left( \frac{2 \cdot N_{MV} + N_T}{N_T} \right)^{-K} = 29,59\% \end{aligned}$$

$u$	0	1	2
$v=0$	100	$\mu_F(0) \cdot p_{NE}(1,0)$ $= 100 \cdot 38,3\% = 38,32$	$\mu_F(0) \cdot p_{NE}(2,0)$ $= 100 \cdot 29,6\% = 29,6$
$v=1$	0	$\frac{\mu_F(0) - \mu_F(1,0)}{10}$ $= \frac{100 - 38,3}{10} = 6,17$	$\mu_F(1,1) \cdot p_{NE}(2,1)$ $= 6,17 \cdot 38,32\% = 2,36$
$v=2$	0	0	$\frac{\mu_F(1) - \sum_{v=0}^1 \mu_F(2,v)}{10}$ $\frac{44,49 - 29,59 - 2,36}{10} = 1,25$
$\mu_F(u)$	100	$38,32 + 6,17 = 44,49$	$29,59 + 2,36 + 1,25 = 33,21$

1. Version: 34%, 2. Version 12%.



$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

b) *Warum verdoppelt eine Fehlerentstehungsrate  $\eta_{RFR} = 0,1$  neue je beseitigter Fehler etwa die MF-Rate?*

$$(3.36) \quad \zeta_F(u) = K \cdot \sum_{v=0}^u \frac{\mu_F(u,v)}{N(u,v)}$$

$u$	0	1	2
$v = 0$	$\frac{0,4 \cdot 100}{10^5}$ $= 4 \cdot 10^{-4}$	$\frac{0,4 \cdot 44,49}{1,1 \cdot 10^6}$ $= 1,39 \cdot 10^{-5}$	$\frac{0,4 \cdot 33,21}{2,1 \cdot 10^6}$ $= 5,64 \cdot 10^{-6}$
$v = 1$	0	$\frac{0,4 \cdot 6,17}{10^5}$ $= 2,47 \cdot 10^{-5}$	$\frac{0,4 \cdot 2,36}{1,1 \cdot 10^6}$ $= 8,59 \cdot 10^{-7}$
$v = 2$	0	0	$\frac{0,4 \cdot 1,25}{10^5}$ $= 5,02 \cdot 10^{-6}$
$\zeta_F(u)$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3,86 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$

Die MF-Rate wird von den in jeder Version neu entstandenen Fehlern dominiert, bei denen unter dem Bruchstrich eine effektive Testsatzlänge von  $10^5$  statt ein Vielfaches von  $10^6$  steht.



$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

- c) Neuberechnung der Tabellen für den halben Testaufwand vor Versionsfreigabe auf  $N_T = 5 \cdot 10^4$ . Welchen Einfluss hat das auf die Anzahl der nicht beseitigten Fehler und die MF-Rate durch diese?

$\mu_F(u, v)$ für $N_T = 10^5$				$\mu_F(u, v)$ für $N_T = 5 \cdot 10^4$		
$u$	0	1	2	0	1	2
$v = 0$	100	38,32	29,59	100	29,59	22,64
$v = 1$	0	6,17	2,36	0	7,04	2,08
$v = 2$	0	0	1,25	0	0	1,19
$\mu_F(u)$	100	44,49	33,21	100	36,63	25,91

Größere Abnahme der Fehleranzahl von grün nach rechts auf 29,6%, statt 38,3% wegen 21-facher statt 11-facher Testsatzlänge. Mehr entstehende Fehler von grün nach grün eins tiefer, weil von den 10% neu entstehenden Fehlern mit nur halb so vielen Tests weniger beseitigt werden. Insgesamt weniger Fehler, weil links von 100 entstandenen Fehlern 61,7 und rechts 70,4 in der Entstehungsversion übrig bleiben.



$$\mu_F(0) = 100, N_T = 10^5, N_{MV} = 10^6, \eta_{RFR} = 0,1, K = 0,4.$$

$\zeta_F(u, v)$ für $N_T = 10^5$				$\zeta_F(u, v)$ für $N_T = 5 \cdot 10^4$		
$u$	0	1	2	0	1	2
$v=0$	$\frac{K \cdot 100}{10^5} = 4 \cdot 10^{-4}$	$\frac{K \cdot 38,2}{11 \cdot 10^5} = 1,4 \cdot 10^{-5}$	$\frac{K \cdot 29,6}{21 \cdot 10^5} = 5,6 \cdot 10^{-6}$	$\frac{K \cdot 100}{5 \cdot 10^4} = 8 \cdot 10^{-4}$	$\frac{K \cdot 29,6}{10,5 \cdot 10^5} = 1,1 \cdot 10^{-5}$	$\frac{K \cdot 22,6}{20,5 \cdot 10^5} = 4,4 \cdot 10^{-6}$
$v=1$	0	$\frac{K \cdot 6,2}{10^5} = 2,5 \cdot 10^{-5}$	$\frac{K \cdot 2,3}{11 \cdot 10^5} = 8,6 \cdot 10^{-7}$	0	$\frac{K \cdot 6,2}{5 \cdot 10^4} = 5,6 \cdot 10^{-5}$	$\frac{K \cdot 2,1}{11 \cdot 10^5} = 7,9 \cdot 10^{-7}$
$v=2$	0	0	$\frac{K \cdot 1,2}{10^5} = 5,0 \cdot 10^{-6}$	0	0	$\frac{K \cdot 1,2}{5 \cdot 10^4} = 9,5 \cdot 10^{-6}$
$\zeta_F(u)$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$

Bei gleicher Anzahl haben die neu entstandenen nicht beseitigten Fehler in jeder Version die doppelte MF-Rate wie bei der doppelten Testanzahl vor dem Einsatz. Nicht nur doppelte, sondern ca. dreifache MF-Rate im Vergleich zu einem Reifeprozess, bei dem bei der Beseitigung keine neuen Fehler entstehen.



# Verteilungen



# Kenngrößen



## Aufgabe 4.1: Erwartungswert, Varianz diskrete Verteilung

Gegeben ist die diskrete Verteilung der Werte  $x_i$ :

$x_i$	5	6	8	11	22
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

- Wie groß ist der Erwartungswert?
- Wie groß sind Varianz und Standardabweichung?

$x_i$	5	6	8	11	22
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) *Wie groß ist der Erwartungswert?*

$$(4.4) \quad \mathbb{E}[X] = \mu = \sum_{i=1}^{\#x} p_i \cdot x_i$$

$$\mathbb{E}[X] = 0,1 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,4 \cdot 8 + 0,2 \cdot 11 + 0,1 \cdot 22 = 9,3$$



$x_i$	5	6	8	11	22
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

b) *Wie groß sind Varianz und Standardabweichung?*

$$(4.6) \quad \text{Var}[X] = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

$$(4.10) \quad \text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$(4.9) \quad \text{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

**Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:**

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= 0,1 \cdot (5 - 9,3)^2 + 0,2 \cdot (6 - 9,3)^2 + 0,4 \cdot (8 - 9,3)^2 \\ &+ 0,2 \cdot (11 - 9,3)^2 + 0,1 \cdot (22 - 9,3)^2 = 21,4 \end{aligned}$$

**Varianz nach Verschiebungssatz:**

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= 0,1 \cdot 5^2 + 0,2 \cdot 6^2 + 0,4 \cdot 8^2 + 0,2 \cdot 11^2 \\ &+ 0,1 \cdot 22^2 - 9,3^2 = 21,4 \end{aligned}$$

**Standardabweichung:**  $\text{sd}[X] = \sqrt{21,4} = 4,63$



### Aufgabe 4.2: Erwartungswert, Varianz Datenstichprobe

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $v_i$  bestimmt:

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

- den Erwartungswert.
- die Varianz.
- die Standardabweichung.



Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

a) *den Erwartungswert.*

$$(4.13) \quad \hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$$

$$\hat{\mathbb{E}}[X] = \frac{1}{10} \cdot (58 + 49 + \dots + 66) = 50,7$$

b) *die Varianz.*

$$(4.14) \quad \hat{\text{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\text{Var}}[X] = \frac{1}{9} \cdot \left( (58 - 50,7)^2 + (49 - 50,7)^2 + \dots \right) = 140$$



Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe

c) *die Standardabweichung.*

$$(4.15) \quad \hat{s}d[X] = \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}ar[X]}$$

$$\hat{s}d[X] = \sqrt{140} = 11,8$$



## Aufgabe 4.3: Varianz Summe

Zeigen Sie für zwei diskrete Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , dass die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$(4.22) \quad \text{Var} [X + Y] = \text{Var} [X] + \text{Var} [Y] + 2 \cdot \text{Cov} [X, Y]$$

$$(4.23) \quad \text{Cov} [X, Y] = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X]) \cdot (Y - \mathbb{E} [Y])]$$

Hilfestellung: Kovarianz der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ :

$$\text{Cov} [X, Y] = \sum_{i=1}^{\#x} \left( \sum_{j=1}^{\#y} (p_i \cdot p_j \cdot (x_i - \mathbb{E} [X]) \cdot (y_j - \mathbb{E} [Y])) \right)$$

---

$X, Y$	Zufallsvariablen.
$\mathbb{E} [\dots]$	Erwartungswert von ...
$\text{Var} [\dots]$	Varianz von ...
$\text{Cov}[X, Y]$	Kovarianz der beiden Zufallsvariablen.
$\#x, \#y$	Anzahl der möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen $X$ und $Y$ .
$x_i, y_j$	Realisierung (möglicher Wert) der Zufallsvariablen $X$ und $Y$ .
$p_j$	Eintrittswahrscheinlichkeit der Realisierung $x_i$ und $y_j$ .



$$(4.22) \quad \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \cdot \text{Cov}[X, Y]$$

$$(4.23) \quad \text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$\text{Var}[X + Y]$  ist die mittlere quadratische Abweichung der Summe  $X + Y$  vom Erwartungswert  $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= \sum_{i=1}^{\#x} \left( \sum_{j=1}^{\#y} \left( p_i \cdot p_j \cdot (x_i - \mathbb{E}[X] + y_j - \mathbb{E}[Y])^2 \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\#x} \left( \sum_{j=1}^{\#y} \left( p_i \cdot p_j \cdot \left( (x_i - \mathbb{E}[X])^2 + (y_j - \mathbb{E}[Y])^2 + 2 \cdot (x_i - \mathbb{E}[X]) \cdot (y_j - \mathbb{E}[Y]) \right) \right) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{\#x} p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2}_{\text{Var}[X]} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\#y} p_j}_{1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\#y} p_j \cdot (y_j - \mathbb{E}[Y])^2}_{\text{Var}[Y]} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\#x} p_i}_{1} \\ &\quad + 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\#x} \left( \sum_{j=1}^{\#y} (p_i \cdot p_j \cdot (x_i - \mathbb{E}[X]) \cdot (y_j - \mathbb{E}[Y])) \right)}_{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])) = \text{Cov}[X, Y]} \end{aligned}$$



## Aufgabe 4.4: Erwartungswert und Varianz Turmhöhe

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von  $\mathbb{E}[h_B] = 3 \text{ cm}$  mit einer Standardabweichung von  $\text{sd}[h_B] = 1 \text{ mm}$  haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms  $h_T = 3 \cdot h_B$ ? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

---

$h_B, h_T$	Baustein- und Turmhöhe.
$\mathbb{E}[\dots]$	Erwartungswert von ...
$\text{Var}[\dots]$	Varianz von ...
$\text{sd}[\dots]$	Standardabweichung von ...



Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von  $\mathbb{E}[h_B] = 3 \text{ cm}$  mit einer Standardabweichung von  $\text{sd}[h_B] = 1 \text{ mm}$  haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms  $h_T = 3 \cdot h_B$ ? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$$(4.20) \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

$$(4.21) \quad \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

$$(4.9) \quad \text{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Erwartungswert der Summe:

$$\mathbb{E}[h_T] = 3 \cdot \mathbb{E}[h_B] = 9 \text{ cm}$$

Varianzen und Standardabweichung der Summe:

$$\text{Var}[h_T] = 3 \cdot \text{Var}[h_B] = 3 \text{ mm}^2$$

$$\text{sd}[h_T] = \sqrt{\text{Var}[h_T]} = \sqrt{3} \text{ mm}$$



# Verteilung von Zählwerten



### Aufgabe 4.5: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler  $i = 1$  bis 5 seien unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten nachweisbar:

Fehler	1	2	3	4	5
$p_i$	10%	20%	40%	50%	30%

- a) *Berechnung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?*
- b) *Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?*



Fehler	1	2	3	4	5
$p_i$	10%	20%	40%	50%	30%

a) Berechnung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?

$$\mathbb{P}_1 [X = 0] = 1 - p_1$$

$$\mathbb{P}_1 [X = 1] = p_1$$

Wiederhole für  $i = 2$  bis  $n$

$$\mathbb{P}_i [X = i] = \mathbb{P}_{i-1} [X = i - 1] \cdot p_i$$

Fehler	0	1	2	3	4	
$\mathbb{P}_1 [X_1 = i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2 [X_1 + X_2 = i]$			2%			
$\mathbb{P}_3 [X_1 + X_2 + X_3 = i]$				0,8%		
...						

$p_i$       Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis von Zählversuch  $i$  eins ist.

$n$         Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.

$X_i$       Potentielle Zählwerte, Zufallsvariablen mit Wertebereich  $X_i \in \{0, 1\}$ .



Fehler	1	2	3	4	5
$p_i$	10%	20%	40%	50%	30%

a) Berechnung der Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler?

Wiederhole für  $i = 2$  bis  $n$

$$\mathbb{P}_i(X = 0) = \mathbb{P}_{i-1}(X = 0) \cdot (1 - p_i)$$

$$\mathbb{P}_i(X = i) = \mathbb{P}_{i-1}(X = i - 1) \cdot p_i$$

Wiederhole für  $k = 1$  bis  $i - 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(X = k) &= \mathbb{P}_{i-1}(X = k) \cdot (1 - p_i) \\ &\quad + \mathbb{P}_{i-1}(X = k - 1) \cdot p_i \end{aligned}$$

Fehler	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_1[X = i]$	90%	10%				
$\mathbb{P}_2[X = i]$	72%	26%	2%			
$\mathbb{P}_3[X = i]$	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
$\mathbb{P}_4[X = i]$	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
$\mathbb{P}_5[X = i]$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%



Fehler	1	2	3	4	5
$p_i$	10%	20%	40%	50%	30%

b) Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?

(4.25)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$$

(4.26)

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 - p_i)$$

(4.9)

$$\text{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i = 0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,5 + 0,3 = 1,5$$

Varianz:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 - p_i) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,2 \dots \\ &+ 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,95\end{aligned}$$

Standardabweichung:  $\text{sd}[X] = \sqrt{0,95} = 0,975$



### Aufgabe 4.6: Annäherung Binomialverteilung

Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binomialverteilung mit derselben Anzahl von Realisierungen und demselben Erwartungswert.

---

$$n = 5, \mathbb{E}[X] = 1,5 \text{ und } \text{Var}[X] = 0,95$$

- Wie groß sind die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und die Varianz der Binomialverteilung.*
- Berechnung der Verteilung und Vergleich mit der Originalverteilung.*

---

$n$	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
$X$	Zufallsvariable.





$n = 5$ ,  $\mathbb{E}[X] = 1,5$  und  $\text{Var}[X] = 0,95$

a) *Wie groß sind die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und die Varianz der Binomialverteilung.*

$$(4.31) \quad \mathbb{E}[X] = \mu = n \cdot p$$

$$(4.32) \quad \text{Var}[X] = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$p = \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = \frac{1,5}{5} = 0,3$$

$$\text{Var}[X_{\text{Bin}}] = 5 \cdot 0,3 \cdot (1 - 0,3) = 1,05$$

Die Varianz der Originalzählverteilung war 0,95 und somit kleiner.

$X_{\text{Bin}}$  Binomialverteilte Zufallsvariable mit demselben Erwartungs- max. Zählwert.

$\mathbb{E}[\dots]$  Erwartungswert von ...

$\text{Var}[\dots]$  Varianz von ...



$n = 5$ ,  $\mathbb{E}[X] = 1,5$  und  $\text{Var}[X] = 0,95$

b) *Berechnung der Verteilung und Vergleich mit der Originalverteilung.*

$$(4.30) \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X_{\text{Bin}} = k) = \binom{5}{k} \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{n-k}$$

$k$	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X_{\text{Bin}} = k]$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%
$\mathbb{P}[X = k]^*$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

\* Zählverteilung der Aufgabe zuvor.  
 $\mathbb{P}[\cdot = x_i]$  Verteilung der diskreten Zufallsvariablen ...  
 $p$  Eintrittswahrscheinlichkeit.



### Aufgabe 4.7: Anzahl der Fehlfunktionen

Schätzen sie für  $\#DS = 10^4$  und eine MF-Rate von  $\zeta = 10^{-5} \left[ \frac{MF}{DS} \right]$

- a) *die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen?*
- b) *die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2 und mehr als 2 Fehlfunktionen auftreten?*

---

$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
$\zeta$	Fehlfunktionsrate.



Schätzen sie für  $\#DS = 10^4$  und eine MF-Rate von  $\zeta = 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$

a) die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen?

$$(4.40) \quad \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Eine kleine zu erwartende Anzahl von vielen möglichen Fehlfunktionen ist näherungsweise poisson-verteilt mit dem Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta = 10^4 \text{ [DS]} \cdot 10^{-5} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right] = 0,1 \text{ [MF]}$$

$X$	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Fehlfunktionen.
$k$	Wert der Zufallsvariablen $X$ .
$\lambda$	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
$\text{[DS]}$	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right]$	Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.
$\text{[MF]}$	Zählwert in Fehlfunktionen.



Schätzen sie für  $\#DS = 10^4$  und eine MF-Rate von  $\zeta = 10^{-5} \left[ \frac{MF}{DS} \right]$

b) *die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2 und mehr als 2 Fehlfunktionen auftreten?*

$$\lambda = 0,1$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = e^{-0,1} = 90,48\%$$

$$\mathbb{P}[X = 1] = e^{-0,1} \cdot 0,1 = 9,05\%$$

$$\mathbb{P}[X = 2] = e^{-0,1} \cdot \frac{0,1^2}{2} = 0,45\%$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 2] &= 1 - \mathbb{P}[k = 0] - \mathbb{P}[k = 1] - \mathbb{P}[k = 2] \\ &= 1 - 90,48\% - 9,05\% - 0,45\% = 0,015\%\end{aligned}$$



# Bereichsschätzung

## Aufgabe 4.8: Maskierungsanzahl

Bei der Überwachung von Service-Leistungen wird im Mittel von tausend Fehlfunktion (MF) eine nicht erkannt:

$$p_M = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

- von 1000 MF keine und mehr als eine unerkannt bleibt?*
- von 5000 MF weniger als 3 und mehr als 8 unerkannt bleiben?*

---

$p_M$	Maskierungswahrscheinlichkeit.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.



$$p_M = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

a) von 1000 MF keine und mehr als eine unerkant bleibt?

$$(4.40) \quad \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Für wenige von tausenden zu erwartenden Maskierungen ist die Anzahl der Maskierungen näherungsweise poisson-verteilt, Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\lambda &= \#MF \cdot p_M \\ &= 10^3 \text{ [MF]} \cdot 10^{-3} = 1 \text{ [MMF]}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = e^{-1} = 36,8\%$$

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 26,4\%$$

$X$	Zufallsvariable, hier die Anzahl der Maskierungen.
$k$	Wert der Zufallsvariablen $X$ .
$\lambda$	Parameter der Poisson-Verteilung (Erwartungswert und gleichzeitig Varianz).
[MMF]	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.



$$p_M = 10^{-3}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

b) von 5000 MF weniger als 3 und mehr als 8 unerkant bleiben?

$$(4.40) \quad \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \#MF \cdot p_M \\ &= 5 \cdot 10^3 \text{ [MF]} \cdot 10^{-3} = 5 \text{ [MMF]} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[X < 2] = e^{-5} = e^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!}\right) = 12,5\%$$

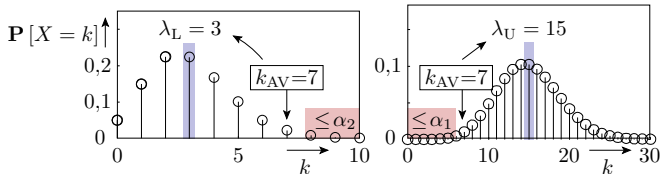
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X > 8] &= 1 - e^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}\right) \\ &= 6,81\% \end{aligned}$$

## Aufgabe 4.9: Bereichsschätzung MF-Rate

Für  $10^6$  Service-Leistungen wurden 5 Fehlfunktionen gezählt. In welchem Bereich liegt die zu erwartende Fehlerfunktionsrate  $\zeta$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ ?

#DS =  $10^6$ ,  $k_{AV} = 5$  [MF],  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$

Minimaler und maximaler Erwartungswert siehe (Folie 4.54):



$$\sum_{k=0}^{k_{AV}} e^{-\lambda_L} \cdot \frac{\lambda_L^k}{k!} \geq 1 - \alpha_2$$

$$\sum_{k=0}^{k_{AV}-1} e^{-\lambda_U} \cdot \frac{\lambda_U^k}{k!} \leq \alpha_1$$

$k_{AV}$  Ist-Zählwert (Actual count value).

$\alpha_1, \alpha_2$  Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.

$\lambda_L, \lambda_U$  Minimaler bzw. maximaler Erwartungswert für einen poisson-verteilten Ist-Wert.



$\#DS = 10^6$ ,  $k_{AV} = 5$  [MF],  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$

Poisson-verteilte Maskierungsanzahl mit Erwartungswert:

$$\lambda = \#DS \cdot \zeta$$

$\alpha_1 = \alpha_2$	$k_{AV} = 4$	$k_{AV} = 5$	$k_{AV} = 6$
0,5%	[1,08, 11,0]	[1,54, 12,6]	[2,04, 14,2]
1%	[1,28, 10,0]	[1,79, 11,6]	[2,33, 13,1]
2%	[1,53, 9,08]	[2,09, 10,6]	[2,68, 12,0]
10%	[2,43, 6,68]	[3,15, 7,99]	[3,89, 9,28]
20%	[3,09, 5,51]	[3,90, 6,73]	[4,73, 7,91]

Aus der Tabelle (Folie 4.54) ist für  $k_{AV} = 5$  und  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$  der Bereich  $\lambda_L = 1,79$  und  $\lambda_U = 11,6$  ablesbar. MF-Rate:

$$1,79 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{MF}{DS} \right] \leq \zeta \leq 11,6 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{MF}{DS} \right]$$

$\#DS$  Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.

$\zeta$  Fehlfunktionsrate.

$\left[ \frac{MF}{DS} \right]$  Zählwertverhältnis in Fehlfunktionen je erbrachte Service-Leistung.



## Aufgabe 4.10: Werkstück mit normalverteilter Masse

Die Masse  $X$  eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 1$  kg, und der Standardabweichung  $\sigma = 10$  g.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse  $X$  größer als 1,03 kg ist?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse  $X$  kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?
- In welchem Bereich liegt die Masse mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ ?

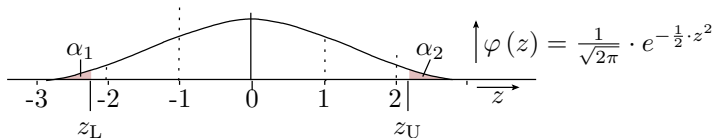
---

$\mu, \sigma$	Erwartungswert, Standardabweichung.
$\alpha_1, \alpha_2$	Irrtumswahrscheinlichkeit, Wert unterhalb bzw. oberhalb des geschätzten Bereichs.
$X$	Normalverteilte Zufallsvariable.
$x_L, x_U$	Untere und obere Schranke des wahrscheinlichen Bereichs von $X$ .



Die Masse  $X$  eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 1$  kg, und der Standardabweichung  $\sigma = 10$  g.

Lösungsansatz:



(4.50)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

(4.54)

$$\alpha_1 = \Phi(z_L) = 1 - \Phi(-z_L) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu - x_L}{\sigma}\right)$$

(4.55)

$$\alpha_2 = 1 - \Phi(z_U) = 1 - \Phi\left(\frac{x_U - \mu}{\sigma}\right)$$

$x, z$

Werte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Z$ .

$\varphi(z)$

Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung.

$\Phi(z)$

Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

$z_L, z_U$

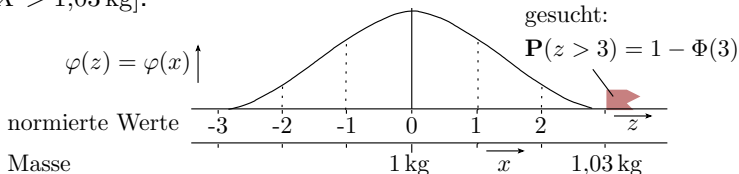
Transformierte untere und obere Schranke.



Die Masse  $X$  eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 1 \text{ kg}$ , und der Standardabweichung  $\sigma = 10 \text{ g}$ .

a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse  $X$  größer als 1,03 kg ist?*

$$\mathbb{P}[X > 1,03 \text{ kg}]:$$



$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	<b>0,9987</b>	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

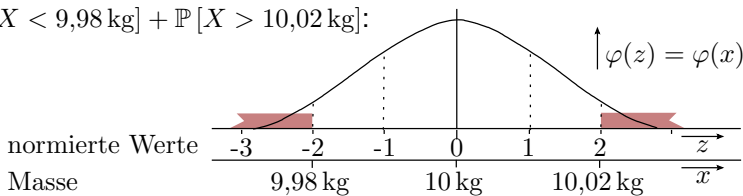
$$z_U = \frac{1,03 \text{ kg} - 1 \text{ kg}}{10 \text{ g}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1 - \Phi(3) = 0,13\%$$



Die Masse  $X$  eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 1 \text{ kg}$ , und der Standardabweichung  $\sigma = 10 \text{ g}$ .

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse  $X$  kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?*

$$\mathbb{P}[X < 9,98 \text{ kg}] + \mathbb{P}[X > 10,02 \text{ kg}]:$$



$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	<b>0,9772</b>	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$$z_L = -2 \quad z_U = 2, \quad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot (1 - \Phi(2)) = 4,56\%$$



Die Masse  $X$  eines Werkstücks sei normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 1$  kg, und der Standardabweichung  $\sigma = 10$  g.

c) *In welchem Bereich liegt die Masse mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ ?*

$$(4.58) \quad x_L = \mu - \sigma \cdot z_L = \mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$(4.59) \quad x_U = \mu + \sigma \cdot z_U = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$\alpha_{1/2}$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\mp \Phi^{-1}(1 - \alpha_{1/2})$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_L = 1 \text{ kg} - 10 \text{ g} \cdot 2,33 = 0,97 \text{ kg}$$

$$x_U = 1 \text{ kg} + 10 \text{ g} \cdot 2,33 = 1,023 \text{ kg}$$





# Eintrittswahrscheinlichkeit

## Aufgabe 4.11: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von 1000 Fehlfunktionen 178 nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0,5\%$ . Geringe Maskierungabhängigkeiten ( $\kappa = 1,5$ ).

---

$$\#MF = n = 1000 \text{ [MF]}, x_{AV} = 178 \text{ [MMF]}, \alpha = 1\%, \kappa = 1,5$$

*Auf welchen symmetrischen Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit lässt das schließen?*

---

$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$n$	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
$x_{AV}$	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MMF]	Zählwert in maskierten (nicht erkannten) Fehlfunktionen.
$\alpha$	Gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit, das Wert außerhalb des geschätzten Bereichs.
$\kappa$	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$ .



$\#MF = n = 1000$  [MF],  $x_{AV} = 178$  [MMF],  $\alpha = 1\%$ ,  $\kappa = 1,5$

*Auf welchen symmetrischen Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit lässt das schließen?*

$$(4.68) \quad \varepsilon_r = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{\kappa \cdot \left( \frac{1}{x_{AV}} \left[ -\frac{1}{n} \right]^* \right)} \quad \text{für } x_{AV} \leq \frac{n}{2}$$

$$(4.70) \quad sr_p = [p_L, p_U] = \frac{x_{AV}}{n} \cdot (1 \mp \varepsilon_r) \quad \text{für } x_{AV} \leq \frac{n}{2}$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\varepsilon_r = 2,57 \cdot \sqrt{1,5 \cdot \left( \frac{1}{178} - \frac{1}{1000} \right)} = 22,9\%$$

$$sr(p_M) = \frac{178}{1000} \cdot (1 \mp 22,9\%)$$

**Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit: 13,7% bis 21,9%.**

$\Phi^{-1}(\cdot)$  Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

$\varepsilon_r$  Intervallradius relativ zum erwarteten Eintritts-Zählwert.

$sr(p_M)$  Symmetrischer Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit.



# Erforderliche Zählwertgröße



## Aufgabe 4.12: Erforderliche Zählwertgröße

Zur Abschätzung der Fehlfunktionsrate  $\zeta$  wurden für  $10^6$  Service-Anforderungen 441 Fehlfunktionen gezählt. Keine Abhängigkeiten ( $\kappa = 1$ ).

$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

- a) *Bereich der MF-Rate, wenn ein relativer Intervallradius von  $\varepsilon_r \leq 10\%$  des Schätzwerts zugelassen ist?*
- b) *Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , dass die MF-Rate mehr als  $\varepsilon_r \leq 10\%$  des Schätzwerts von diesem abweicht?*

---

$\zeta$	Fehlfunktionsrate.
$\#DS$	Anzahl der erbrachten Service-Leistungen.
$n$	Anzahl der Zählversuche, maximaler Zählwert.
[DS]	Zählwert in erbrachten Service-Leistungen.
$\#MF$	Anzahl der Fehlfunktionen (Number of malfunctions).
$x_{AV}$	Experimentell bestimmter Ist-Zählwert, Schätzwert für den Erwartungswert.
[MF]	Zählwert in Fehlfunktionen.
$\kappa$	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$ .
$\varepsilon_r$	Intervallradius relativ zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.



$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

- c) *Wie viele Fehlfunktionen müssen mindestens beobachtbar sein, um die Irrtumswahrscheinlichkeit für die  $\mp 10\%$  Bereichszugehörigkeit auf  $\alpha \leq 2\%$  abzusenken?*
- d) *Auf und um welchen Wert muss die Anzahl ausprobierten Service-Leistungen erhöht werden, um das Ziel in Aufgabenteil c ( $\alpha \leq 2\%$  für  $\varepsilon_r \leq 10\%$ ) zu erreichen?*



$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

a) *Bereich der MF-Rate, wenn ein relativer Intervallradius von  $\varepsilon_r \leq 10\%$  des Schätzwerts zugelassen ist?*

$$(1.9) \quad \zeta_{[MT]} = \frac{1}{R_{[MT]}} = \frac{\#NDM}{\#DS} \Big|_{ACR}$$

$$(4.70) \quad sr_p = [p_L, p_U] = \frac{x_{AV}}{n} \cdot (1 \mp \varepsilon_r) \quad \text{für } x_{AV} \leq \frac{n}{2}$$

Bereich der MF-Rate:

$$\begin{aligned} sr(\zeta) &= \frac{\#MF}{\#DS} \cdot (1 \mp \varepsilon_r) \quad \text{für } \hat{\zeta} \leq 50\% \\ &= \frac{441 \text{ [MF]}}{10^6 \text{ [DS]}} \cdot (1 \mp 10\%) = (4,0 \dots 4,8) \cdot 10^{-4} \left[ \frac{\text{MF}}{\text{DS}} \right] \end{aligned}$$

ACR bezieht sich immer auf einen zulässigen Intervallradius und eine zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit. Im Beispiel sind die Zählwerte  $\#DS \geq 10^6$  und  $\#MF \geq 441$  bei  $\kappa = 1$  ausreichend für eine Schätzgenauigkeit  $\varepsilon_r \leq 10\%$  und eine noch zu bestimmende Irrtumswahrscheinlichkeit.

ACR

 $sr_\zeta$ 

Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.

Symmetrischer Bereich der geschätzten Fehlfunktionsrate.



$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

b) Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , dass die MF-Rate mehr als  $\varepsilon_r \leq 10\%$  des Schätzwerts von diesem abweicht?

$$(4.68) \quad \varepsilon_r = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{\kappa \cdot \left( \frac{1}{x_{AV}} \left[ -\frac{1}{n} \right]^* \right)} \text{ für } x_{AV} \leq \frac{n}{2}$$

Umgestellte nach der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \left( 1 - \Phi \left( \frac{\varepsilon_r}{\sqrt{\kappa \cdot \left( \frac{1}{\#MF} - \frac{1}{\#DS} \right)}} \right) \right) \\ &= 2 \cdot \left( 1 - \Phi \left( \frac{0,1}{\sqrt{\left( \frac{1}{441} - 10^{-6} \right)}} \right) \right) \\ &= 2 \cdot (1 - \Phi(2,1)) = 3,6\% \end{aligned}$$

$z$	...,0	...,1
1,...	0,8413	0,8643
2,...	0,9772	<b>0,9821</b>
3,...	0,9987	0,9990





$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

- c) *Wie viele Fehlfunktionen müssen mindestens beobachtbar sein, um die Irrtumswahrscheinlichkeit für die  $\mp 10\%$  Bereichszugehörigkeit auf  $\alpha \leq 2\%$  abzusenken?*

$$(4.72) \quad x_{AV} \geq \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_r^2} \cdot (1 - \hat{p}) \text{ für } \hat{p} \leq 50\%$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Umstellung nach dem (erforderlichen) Istzählwert  $x_{AV} = \#MF$ :

$$\begin{aligned} x_{AV} = \#MF &\geq \left( \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\varepsilon_r} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{441}{10^6} \right) \\ &= \left( \frac{2,33}{0,1} \right)^2 \cdot 99,96\% = 543 \end{aligned}$$



$$\#DS = n = 10^6 \text{ [DS]}, \#MF = x_{AV} = 441 \text{ [MF]}, \kappa = 1$$

- d) *Auf und um welchen Wert muss die Anzahl ausprobierten Service-Leistungen erhöht werden, um das Ziel in Aufgabenteil c ( $\alpha \leq 2\%$  für  $\varepsilon_r \leq 10\%$ ) zu erreichen?*

$$(1.9) \quad \zeta_{[MT]} = \frac{1}{R_{[MT]}} = \frac{\#NDM}{\#DS} \Big|_{ACR}$$

Proportionale Erhöhung der Anzahl der erbrachten Service-Leistungen zum Zählwert der Fehlfunktionen:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \frac{x_{AV}(\alpha=3,58\%)}{\#DS(\alpha=3,58\%)} = \frac{x_{AV}(\alpha=2\%)}{\#DS(\alpha=2\%)} \\ \#DS(\alpha=2\%) &= \#DS(\alpha=3,58\%) \cdot \frac{x_{AV}(\alpha=2\%)}{x_{AV}(\alpha=3,58\%)} \\ &= 10^6 \text{ [DS]} \cdot \frac{543 \text{ [MF]}}{441 \text{ [MF]}} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ [DS]} \end{aligned}$$

Die Anzahl der erbrachten Service-Leistungen  $\#DS$  ist um  $2,31 \cdot 10^5$  auf  $1,23 \cdot 10^6$  zu erhöhen.



### Aufgabe 4.13: Mindestmodellfehleranzahl

Eine Fehlersimulation soll eine Modellfehlerabdeckung von  $99\% \mp 0,2\%$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha \leq 2\%$  nachweisen. Nachweisabhängigkeiten zwischen den Modellfehlern sind für den Überschlag zu vernachlässigen.

$$\hat{p} = F\hat{C}_M = 99\% \gg 50\%, \varepsilon_{\bar{r}} = \frac{0,2\%}{1-99\%} = 20\%, \alpha \leq 2\%, \kappa = 1, .$$

- Wie groß muss die Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mindesten bleiben?
- Welche Anzahl von unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern ist dafür mindestens erforderlich?

---

$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$F\hat{C}_M$	Schätzwert der Modellfehlerabdeckung.
$\varepsilon_{\bar{r}}$	Intervallradius reaktiv zum erwarteten Nichteintritts-Zählwerts.
$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.
$\kappa$	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$ .



$$\hat{p} = F\hat{C}_M = 99\% \gg 50\%, \varepsilon_{\bar{r}} = \frac{0,2\%}{1-99\%} = 20\%, \alpha \leq 2\%, \kappa = 1, .$$

a) *Wie groß muss die Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler mindestens bleiben?*

$$(4.73) \quad n - x_{AV} \geq \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_{\bar{r}}^2} \cdot \hat{p} \text{ für } \hat{p} > 50\%$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned} \#NDF_M &\geq \frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2 \cdot \hat{p}}{\varepsilon_{\bar{r}}^2} \\ &= \frac{2,33^2 \cdot 99\%}{0,2^2} = 134,4 \text{ [F]} \end{aligned}$$

Mindesten 135 nicht unabhängig von einander nachweisbare, nicht redundante nicht nachgewiesene Modellfehler.

$n, x_{AV}$

Anzahl der Zählversuche, Experimentell bestimmter Ist-Zählwert.

$\#NDF_M$

Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.

$\Phi^{-1}(\cdot)$

Inverse Funktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.



$$\hat{p} = FC_M = 99\% \gg 50\%, \varepsilon_{\bar{r}} = \frac{0,2\%}{1-99\%} = 20\%, \alpha \leq 2\%, \kappa = 1, .$$

b) Welche Anzahl von unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern ist dafür mindestens erforderlich?

$$(2.1) \quad FC = \frac{\#DF}{\#F} \Big|_{ACR}$$

$$FC_M = 1 - \frac{\#NDF_M}{\#F_M}$$

$$\#F_M = \frac{\#NDF_M}{1 - FC_M} = \frac{136 [F]}{1 - 99\%} = 13.600 [F]$$

Eine Abschätzung  $FC_M \in 99\% \mp 0,2\%$  mit  $\alpha \leq 2\%$  verlangt 13.600 unabhängig voneinander nachweisbare Modellfehler. Wenn Abhängigkeiten zu berücksichtigen sind ( $\kappa > 1$ ), dann  $\kappa$ -mal so viele.

$\#F_M$  Anzahl der Modellfehler.  
 [F] Zählwert in Modellfehler.



## Aufgabe 4.14: Leistungsabhängiges Gehalt

Beim Programmieren entstehen etwa 10 bis 100 Fehler je 1000 NLOC. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit von der Fehlerentstehungsrate  $\xi$  gezahlt werden. Dazu soll der zu erwartende Bereich von  $\xi$  mit einer relativen Genauigkeit von 25% bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 4\%$  geschätzt werden. Zusatzannahme: normalverteilte Fehleranzahl mit  $\kappa = 1$ .

$$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[ \frac{F}{\text{NLOC}} \right] \ll 50\%, \varepsilon_r = 25\%, \alpha = 4\%, \kappa = 1.$$

*Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?*

NLOC	Netto Lines of Code, Anzahl der Code-Zeilen ohne Kommentar und Leerzeilen.
$\hat{p}$	Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit.
$\hat{\xi}$	Zu schätzende Fehlergenerierungsrate in Fehler je NLOC.
$\left[ \frac{F}{\text{NLOC}} \right]$	Zählwertverhältnis in entstandene Fehler je Netto-Codezeile.
$\varepsilon_r$	Intervallradius relativ zum erwarteten Eintritts-Zählwert.
$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.
$\kappa$	Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten, für unabhängige Zählwerte $\kappa \leq 1$ .



$$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[ \frac{F}{\text{NLOC}} \right] \ll 50\%, \varepsilon_r = 25\%, \alpha = 4\%, \kappa = 1.$$

Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

$$(4.72) \quad x_{AV} \geq \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_r^2} \cdot (1 - \hat{p}) \quad \text{für } \hat{p} \leq 50\%$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Mindestanzahl Fehler  $\#F_C \geq x_{AV}$ , die für einen ausreichend genaue Evaluierung unabhängig voneinander entstehen müssen:

$$\#F_C \geq \left( \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\varepsilon_r} \right)^2 \cdot \underbrace{(1 - 10^{-3} \dots 10^{-2})}_{\approx 1} \geq \left( \frac{2,05}{0,25} \right)^2 = 67,2$$

$\#F_C$  Anzahl der Fehler aus den Entstehungsprozessen.



$$\hat{p} = \hat{\xi} = 10^{-3} \dots 10^{-2} \left[ \frac{F}{\text{NLOC}} \right] \ll 50\%, \varepsilon_r = 25\%, \alpha = 4\%, \kappa = 1.$$

*Für wie viele Nettocodezeilen (NLOC) müssen dazu von jedem Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?*

(2.49)

$$\xi_{\langle C \rangle} = \frac{\mu_{CF}(C)}{C}$$

Die Anzahl der zu überprüfenden NLOC je Programmierer:

$$C \geq \frac{672}{\xi}$$

$\xi$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
$C$	67.200 NLOC	6.720 NLOC

Bei einer typ. Programmierleistung von 100 bis 500 NLOC pro Tag müssen die Programmierfehler über Monate gezählt werden.

$C$  Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).  
 $ACR$  Brauchbare Schätzwerte nur bei geeigneten Zählwertgrößen.





# Nachweisabhängigkeiten



## Aufgabe 4.15: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

- Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.*
- Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?*

---

$\#v$	Größe der Datenstichprobe.
$v_i$	Wert $i$ der Datenstichprobe.
$\hat{\mu}$	Geschätzter Erwartungswert des Zählwerts.
$\hat{\sigma}^2$	Geschätzte Varianz des Zählwerts.



Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

$$(4.13) \quad \hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$$

$$(4.14) \quad \hat{\text{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$$

Erwartungswert:

$$\hat{\mu} = \frac{58 + 49 + 40 + 54 + 67 + 35 + 34 + 57 + 47 + 66}{10} = 50,7$$

Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(58 - 50,7)^2 + (49 - 50,7)^2 + (40 - 50,7)^2 + \dots}{9} = 140$$



Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $v_i$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

b) *Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?*

(4.37)

$$\hat{p} = \frac{\hat{\mu}}{n} = \frac{x_{AV}}{n}$$

(4.76)

$$\hat{\kappa} = \frac{\widehat{\text{Var}}[X]}{\hat{\mathbb{E}}[X] \cdot (1 - \hat{p})} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu} \cdot (1 - \hat{p})}$$

$$\hat{p} = \frac{50,7}{1000} = 5,07\%$$

$$\hat{\kappa} = \frac{140,01}{50,7 \cdot (1 - 5,07\%)} = 2,91$$

Die Varianz ist so hoch, als ob in der Modellfehler immer etwa drei Fehler identisch nachweisbar wären.

$\hat{\kappa}$

Geschätzte Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten.



# Mischverteilung

## Aufgabe 4.16: Verteilung von Widerstandswerten

In eine Kiste für  $1\text{k}\Omega$ -Widerstände wurde gemischt:

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert  $1,02\text{ k}\Omega$  und Standardabweichung  $20\ \Omega$  und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert  $0,99\text{ k}\Omega$  und Standardabweichung  $10\ \Omega$ .

$\#R_1 = 500: \mu_{R_1} = 1,02\text{ k}\Omega, \sigma_{R_1} = 20\text{ k}\Omega, \#R_2 = 300: \mu_{R_2} = 0,99\text{ k}\Omega, \sigma_{R_2} = 10\text{ k}\Omega$

- a) *Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste? Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung  $\Phi(z)$ .*
- b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Widerstand einen Wert  $R \leq 9,8\text{ k}\Omega$ ?*

---

$\#R_i$       Anzahl der Widerstände mit Erwartungswert  $\mu_{R_i}$  und Standardabweichung  $\sigma_{R_i}$ .  
 $\Phi(z)$       Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.



$\#R_1 = 500$ :  $\mu_{R1} = 1,02 \text{ k}\Omega$ ,  $\sigma_{R1} = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $\#R_2 = 300$ :  $\mu_{R2} = 0,99 \text{ k}\Omega$ ,  
 $\sigma_{R2} = 10 \text{ k}\Omega$

a) Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste? Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung  $\Phi(z)$ .

$$(4.78) \quad F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{j=1}^{\#Y} h_j \cdot F_{X_j}(x)$$

$$(4.50) \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$F_X(R) = \sum_{i=1}^{\#i} h_i \cdot \Phi\left(\frac{R - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$F_X(R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1,02 \text{ k}\Omega}{20 \text{ }\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0,99 \text{ k}\Omega}{10 \text{ }\Omega}\right)$$

- $X$  Zufallsvariable mit Mischverteilungsfunktion  $F_X(x)$ .  
 $X_j$  Zu mischende Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen  $F_{X_j}(x)$ .  
 $Y$  Zufallsvariable für die Auswahl der gemischten Objekte.  
 $\#Y$  Anzahl der Objekttypen mit unterschiedlicher Verteilungsfunktion.  
 $h_j$  Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt mit Verteilungsfunktion  $j$  ausgewählt wird.



# $R_1 = 500$ :  $\mu_{R1} = 1,02 \text{ k}\Omega$ ,  $\sigma_{R1} = 20 \text{ k}\Omega$ , # $R_2 = 300$ :  $\mu_{R2} = 0,99 \text{ k}\Omega$ ,  
 $\sigma_{R2} = 10 \text{ k}\Omega$

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Widerstand einen Wert  $R \leq 9,8 \text{ k}\Omega$ ?*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R \leq 9,9 \text{ k}\Omega] &= \frac{5}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0,98 \text{ k}\Omega - 1,02 \text{ k}\Omega}{20 \Omega}\right) + \frac{3}{8} \cdot \Phi\left(\frac{0,98 \text{ k}\Omega - 0,99 \text{ k}\Omega}{10 \Omega}\right) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \Phi(-2) + \frac{3}{8} \cdot \Phi(-1) = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{(1 - \Phi(2))}_{0,0228} + \frac{3}{8} \cdot \underbrace{(1 - \Phi(1))}_{0,1587} \\ &= 8,23\% \end{aligned}$$

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000



## Aufgabe 4.17: Tschebyscheffsche Ungleichung

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

---

$C_i$ : 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF],  $\alpha = 2\%$

- Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?*
- Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?*
- Kapazitätsbereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung?*

---

$C_i$	Stichprobe von Kapazitätswerten.
[nF]	Wert in nF, Masseinheit der Kapazität.
$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit Werte außerhalb des geschätzten Bereichs.



$C_i$ : 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF],  $\alpha = 2\%$

a) Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?

$$(4.13) \quad \hat{\mathbb{E}}[X] = \hat{\mu} = \frac{1}{\#v} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} v_i$$

$$(4.14) \quad \hat{\text{Var}}[X] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\#v-1} \cdot \sum_{i=1}^{\#v} (v_i - \hat{\mu})^2$$

$$(4.15) \quad \hat{\text{sd}}[X] = \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\text{Var}}[X]}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10} \cdot (1,20 + 1,23 + 1,18 + 1,25 + 1,21 + 1,19 + 1,23 + 1,22 + 1,09 + 1,17) = 1,17$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(1,20 - 1,17)^2 + (1,23 - 1,17)^2 + \dots}{9}} = 0,045$$

$\hat{\mu}, \hat{\sigma}$

Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung.

$\#v$

Größe der Datenstichprobe.

$v_i$

Wert  $i$  der Datenstichprobe.



$C_i$ : 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF],  $\alpha = 2\%$

b) *Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?*

$$(4.61) \quad \text{sr} = [x_L, x_U] = \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Geschätzter Erwartungswert und geschätzte Standardabweichung der Kapazität aus Aufgabenteil a:  $\mu = 1,17$  [nF],  $\sigma = 0,045$  [nF]

$\alpha$	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1} (1 - \alpha)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned} \text{sr}(C) &\in \mu \mp \sigma \cdot \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 1,17 \mp 0,0450 \cdot 2,33 \\ &= [1,065, 1,275] \end{aligned}$$

$\text{sr}(C)$

Symmetrischer Bereich der Kapazitätswerte.

$\Phi(z)$

Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.



$C_i$ : 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17 [nF],  $\alpha = 2\%$

c) *Kapazitätsbereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung?*

(4.85)

$$\text{sr} = [x_L, x_U] = \mu \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}$$

Schätzwerte aus Aufgabenteil a:  $\mu = 1,17$  [nF],  $\sigma = 0,045$  [nF]

$$\begin{aligned}\text{sr}(C) &\in \mu \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} \\ &= 1,17 \mp \frac{0,0540}{\sqrt{2\%}} \\ &= [0,861, 1,497]\end{aligned}$$

Wenn bekannt ist, dass die Kapazitätswerte normalverteilt sind, beträgt der Bereich, in dem 98% der Werte liegen, nur 1,065 bis 1,275.



# Pareto-Verteilung



### Aufgabe 4.18: Verteilung von Schadenskosten

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab  $x_{\min} = 10.000$  Eur seien so pareto-verteilt, dass  $U = 15\%$  der Schadensfälle  $W = 90\%$  der Gesamtschadenskosten verursachen.

- Welchen Formfaktor  $K$  hat die Pareto-Verteilung?
- Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?

---

$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
$U$	Der Anteil der Ursachen mit der größten Wirkung.
$W$	Anteil an der Gesamtwirkung.
$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.

Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab  $x_{\min} = 10.000$  Eur seien so pareto-verteilt, dass  $U = 15\%$  der Schadensfälle  $W = 90\%$  der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) *Welchen Formfaktor  $K$  hat die Pareto-Verteilung?*

(4.96)

$$K = \frac{1}{1 - \frac{\log(W)}{\log(U)}}$$

$$K = \frac{1}{1 - \frac{\ln(90\%)}{\ln(15\%)}} = 1,0588$$



Die erheblichen Schäden durch autonome Fahrzeuge ab  $x_{\min} = 10.000$  Eur seien so pareto-verteilt, dass  $U = 15\%$  der Schadensfälle  $W = 90\%$  der Gesamtschadenskosten verursachen.

b) *Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?*

$$(4.95) \quad W = \frac{\mathbb{E}[X|X \geq w_{\min}]}{\mathbb{E}[X]} = \left( \frac{x_{\min}}{w_{\min}} \right)^{K-1} = \left( U^{\frac{1}{K}} \right)^{K-1} = U^{\frac{K-1}{K}}$$

$$\begin{aligned} w_{\min} &= x_{\min} \cdot U^{-\frac{1}{K}} \\ &= 10.000 \text{ Eur} \cdot 15\%^{-\frac{1}{1,0588}} = 60.000 \text{ Eur} \end{aligned}$$

$w_{\min}$

Mindestwirkung des Anteils der Ursachen mit der größten Wirkung.





## Aufgabe 4.19: Verteilung der Nachweislänge

Zur Abschätzung des Formparameter  $K$  einer parato-verteilten Nachweislänge wurden für einen Zufallstestsatz für 24 Modellfehler folgende Nachweislängen bestimmt:

---

10, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 33, 37, 40, 52, 67, 70, 83, 110, 185, 217, 290, 420, 850, 1730.

- Darstellung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $\#F_{\text{ND}}$  als Funktion der Testanzahl  $N$ , doppelt logarithmisch für  $N = 10$  bis 1000. Annäherung durch eine Ausgleichsgerade.*
- Bestimmen Sie aus zwei Punkten der Ausgleichsgeraden den Formfaktor  $K$  der Pareto-Verteilung der Nachweislänge.*

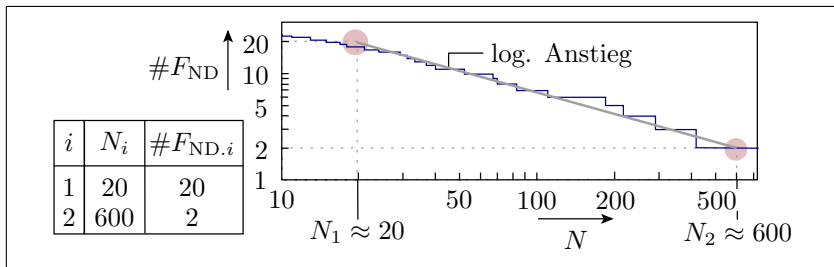
---

$F_X(N)$	Verteilungsfunktion der Nachweislänge.
$\mu_{\text{FC}}(N)$	Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.
$N$	Anzahl der Tests.
$K$	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).



10, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 33, 37, 40, 52, 67, 70, 83, 110, 185, 217, 290, 420, 850, 1730.

- a) Darstellung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $\#F_{\text{ND}}$  als Funktion der Testanzahl  $N$ , doppelt logarithmisch für  $N = 10$  bis 1000. Annäherung durch eine Ausgleichsgerade.



$N_i$  Testanzahl mit einer bekannter Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler.  
 $\#F_{\text{ND}.i}$  Anzahl der Modellfehler, die mit Testsatzlänge  $N_i$  nicht nachweisbar sind.



b) Bestimmen Sie aus zwei Punkten der Ausgleichsgeraden den Formfaktor  $K$  der Pareto-Verteilung der Nachweislänge.

$$(4.87) \quad F_X(N) = \mathbb{P}[X \leq N] = \mu_{FC}(N) = 1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-K} \quad \text{für } N \geq N_0$$

$$(2.1) \quad FC = \left. \frac{\#DF}{\#F} \right|_{ACR}$$

$$\#F_{ND}(N) \sim 1 - \mu_{FC}(N) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-K}$$

$$\frac{\#F_{ND.1}}{\#F_{ND.2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{-K}$$

$$K = \frac{\ln\left(\frac{\#F_{ND.1}}{\#F_{ND.2}}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} = \frac{\ln(10)}{\ln(30)} = 0,68$$

$i$	$N_i$	$\#F_{ND.i}$
1	20	20
2	600	2

$F_X(N)$  Verteilungsfunktion der Nachweislänge.

$\mu_{FC}(N)$  Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Testanzahl.

$N_0$  Testanzahl, für die vorher alle Fehler beseitigt wurden, also für  $FC = 0$ .

$N$  Anzahl der Tests, für die erkannten Fehler beseitigt werden, incl.  $N_0$ .

$\#F_D$  Anzahl der erkennbaren Fehler (Number of detectable faults).



# Tests und Kontrollen



# Inspektion



### Aufgabe 5.1: Inspektionsfehlerabdeckung

Inspektionsergebnisse für ein Programm aus 1000 NLOC und :

- Inspekteur 1: 85 gefundene Fehler in 5 h
- Inspekteur 2: 76 gefundene Fehler in 4 h
- Schnittmenge: 56 übereinstimmende gefundene Fehler.

---

$C = 1000$  NLOC,  $\#F_1 = 85$ ,  $\#F_2 = 76$ ,  $\#(F_1 \cap F_2) = 56$ ,  $t_1 = 5$  h,  
 $t_2 = 4$  h, daraus ableitbar  $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

- Effizienz und Effektivität beider Inspektoren?*
- Gesamtanzahl und Anzahl der nicht gefundenen Fehler?*
- Inspektionsfehlerabdeckung?*

---

$C$	Metrik für den Entstehungsaufwand, hier in NLOC (netto lines of code).
$\#F_1, \#F_2$	Anzahl der von Inspektor 1 bzw. Inspektor 2 gefundenen Fehler.
$\#(F_1 \cap F_2)$	Anzahl von beiden Inspektoren gefundenen Fehler.
$t$	Inspektionszeit in Mitarbeiterstunden.
$\#(F_1 \cup F_2)$	Gesamtanzahl der gefundenen Fehler (von beiden Inspektoren insgesamt).



$C = 1000$  NLOC,  $\#F_1 = 85$ ,  $\#F_2 = 76$ ,  $\#(F_1 \cap F_2) = 56$ ,  $t_1 = 5$  h,  
 $t_2 = 4$  h, daraus ableitbar  $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

a) *Effizienz und Effektivität beider Inspektoren?*

Effizienz (gefundene Fehler je Mitarbeiterstunde):

$$EFC_1 = \frac{85 \text{ Fehler}}{5 \text{ h}} = 17 \frac{\text{Fehler}}{\text{h}}$$

$$EFC_2 = \frac{76 \text{ Fehler}}{4 \text{ h}} = 19 \frac{\text{Fehler}}{\text{h}}$$

Effektivität (Gefundene Fehler je 1000 NLOC):

$$EFT_1 = \frac{85 \text{ Fehler}}{1.000 \text{ NLOC}}$$

$$EFT_2 = \frac{76 \text{ Fehler}}{1.000 \text{ NLOC}}$$

$EFC$

Effizienz, gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde.

$EFT$

Effektivität, gefundenen Fehler je 1000 NLOC.

$\hat{\mu}_F$

Geschätzter Erwartungswerte der Gesamtfehleranzahl.

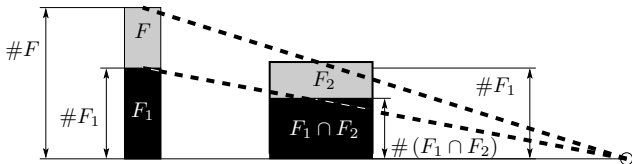
$\hat{\mu}_{NFD}$

Geschätzte zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

$C = 1000$  NLOC,  $\#F_1 = 85$ ,  $\#F_2 = 76$ ,  $\#(F_1 \cap F_2) = 56$ ,  $t_1 = 5$  h,  
 $t_1 = 4$  h, daraus ableitbar  $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

b) *Gesamtanzahl und Anzahl der nicht gefundenen Fehler?*

$$(5.1) \quad \hat{\mu}_F = \frac{\#F_1 \cdot \#F_2}{\#(F_1 \cap F_2)} \Big|_{ACR}$$



$$\hat{\mu}_F = \frac{85 \cdot 76}{56} = 115,4$$

Zu erwartende Anzahl der nicht gefundenen Fehler:

$$\hat{\mu}_{NDF} = \hat{\mu}_F - \#(M_1 \cup M_2) = 115,4 - 105 = 10,4$$





$C = 1000$  NLOC,  $\#F_1 = 85$ ,  $\#F_2 = 76$ ,  $\#(F_1 \cap F_2) = 56$ ,  $t_1 = 5$  h,  
 $t_2 = 4$  h, daraus ableitbar  $\#(F_1 \cup F_2) = 85 + 76 - 56 = 105$

c) *Inspektionsfehlerabdeckung?*

$$(5.2) \quad \hat{\mu}_{FC} = \frac{\#(F_1 \cup F_2)}{\hat{\mu}_F} \Big|_{ACR} = \frac{\#(F_1 \cap F_2) \cdot \#(F_1 \cup F_2)}{\#F_1 \cdot \#F_2} \Big|_{ACR}$$

$$\hat{\mu}_{FC} = \frac{56 \cdot 105}{85 \cdot 76} = \frac{105}{115,4} = 91\%$$

Kontrolle:

$$\hat{\mu}_{FC} = 1 - \frac{\hat{\mu}_{NDF}}{\hat{\mu}_F} = 1 - \frac{10,4}{115,4} = 91\% \checkmark$$

Anmerkung: Bei Produkten / Quotient von drei Zählwerten ist der Varianzkoeffizient, hier für das Nichteintreten, die Summe von drei Varianzkoeffizienten  $\gtrsim 10\%$ . Eine Bereichsvorhersage mit  $\varepsilon_{\bar{r}} = 50\%$  hat eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha \gtrsim 2 \cdot (1 -) \Phi\left(\frac{0,5}{0,3}\right) \approx 10\%$ .



## Aufgabe 5.2: Inspektion als Zufallstest

Die Anzahl der Inspektoren  $X$ , die für den Nachweis eines Fehlers erforderlich sind, sei pareto-verteilt mit  $K = 0,5$ :

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5} \quad \text{für } x \geq x_{\min}$$

- Erwartete Fehlerabdeckung mit einem Inspekteur 60%.
  - Der erste Inspekteur findet 100 Fehler. Inspektionsdauer je Inspekteur eine Mitarbeiterstunde.
- a) *Zusammenhang zwischen der Inspektionsfehlerabdeckung und der Anzahl der Inspektoren?*
- b) *Erforderliche Anzahl der Inspektoren  $x$  für eine zu erwartenden Fehlerabdeckung von 95%?*
- c) *Zu erwartende Anzahl der von Inspekteur 2 bis 10 gefundenen Fehler und zu erwartende Effizienz der Inspektoren 1 bis 8?*

---

$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.
$x_{\min} > 0$	Skalenparameter der Pareto-Verteilung.
$x$	Anzahl der Inspektoren.



$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5} \quad \text{für } x \geq x_{\min}$$

- Erwartete Fehlerabdeckung mit einem Inspekteur 60%.

a) *Zusammenhang zwischen der Inspektionsfehlerabdeckung und der Anzahl der Inspektoren?*

Verteilungsfunktion als die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Fehler nachweisbar ist, ist gleich der zu erwartenden Fehlerabdeckung:

$$\mu_{\text{FC}}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5}$$

Bestimmung von  $x_{\min}$ :

$$\mu_{\text{FC}}(1) = 60\% = 1 - (x_{\min})^{0,5}$$

$$x_{\min} = 40\%^2 = 0,16$$

$\mu_{\text{FC}}(x)$     Zu erwartende Fehlerabdeckung in Abhängigkeit von der Anzahl der Inspektoren.

b) *Erforderliche Anzahl der Inspektoren  $x$  für eine zu erwartenden Fehlerabdeckung von 95%?*

Umstellung von

$$\mu_{FC}(x) = 1 - \left(\frac{0,16}{x}\right)^{0,5}$$

nach der Anzahl der Inspektoren:

$$x = \frac{0,16}{(1 - \mu_{FC}(x))^2} = \frac{0,16}{(1 - 95\%)^2} = 64$$



- Der erste Inspekteur findet 100 Fehler. Inspektionsdauer je Inspekteur eine Mitarbeiterstunde.

c) *Zu erwartende Anzahl der von Inspekteur 2 bis 10 gefundenen Fehler und zu erwartende Effizienz der Inspektoren 1 bis 8?*

$$\mu_{FC}(x) = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{0,5}$$

Erwartete Gesamtfehleranzahl:

$$\mu_F = \frac{\mu_{DF}(1)}{1 - \mu_{FC}(1)} = \frac{100 F}{40\%} = 250 F$$

Zu erwartende Anzahl der je Inspekteur gefundenen Fehler:

$$\mu_{DF}(x) = \mu_F \cdot (1 - \mu_{FC}(x)) = 250 F \cdot \left(\frac{0,16}{x}\right)^{0,5}$$

$\hat{\mu}_F$       Geschätzter Erwartungswerte der Gesamtfehleranzahl.

[F]      Zählwert in Fehlern.

$\mu_{DF}(x)$       Erwartete Anzahl nachweisbarer Fehler als Funktion der Anzahl der Inspektoren.

Effizienz (Gefundene Fehler pro Mitarbeiterstunde):

$$EFC(x) = (\mu_{DF}(x) - \mu_{DF}(x-1)) / 1 \text{ h}$$

Insp.	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_{DF}(x)$	100	70,7	57,7	50	44,7	40,8	37,8	35,4
$EFC(x)$	100	29,3	13,0	7,7	5,3	3,9	3,0	2,4

$\mu_{EFC}(x)$  Zu erwartende Effizienz als Funktion von der Anzahl der Inspektoren.



# Dynamische Tests



### Aufgabe 5.3: Funktionstest

- a) *Vorteile der digitalen gegenüber der analogen Verarbeitung?*
- b) *Typische Verarbeitungskette mit physikalischen Ein- und Ausgaben?*
- c) *Was bedeutet »Hardware in the Loop« und welche wesentlichen Vorzüge bietet das?*
- d) *Was bedeutet Prüfgerechter Entwurf?*



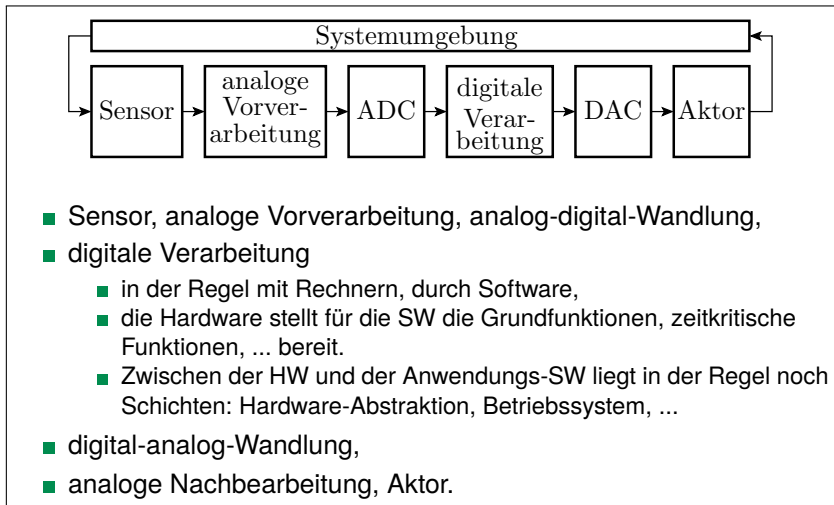


### a) *Vorteile der digitalen gegenüber der analogen Verarbeitung?*

- Fehlertoleranz gegen Störungen, Fertigungsstreuungen, ...(Folie 1.102)
- geringere Fertigungskosten und Entwurfskosten, kleiner, schneller, genauer zuverlässiger.
- Zusätzlicher funktionaler Gestaltungsspielraum (Folie 5.25):
  - Datenspeicherung,
  - sequentielle und SW-gesteuerte Abarbeitung,
  - ...

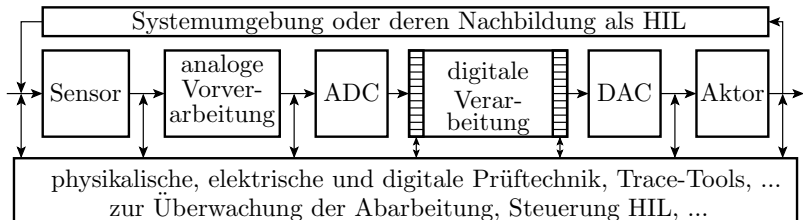


b) *Typische Verarbeitungskette mit physikalischen Ein- und Ausgaben?*



c) Was bedeutet »Hardware in the Loop« und welche wesentlichen Vorzüge bietet das?

Nachbildung der Systemumgebung durch eine Attrappe oder Simulation:



Mehr und frühere Testmöglichkeiten, insbesondere

- auch die Reaktion in gefährlichen Situation,
- besseren Einblick in die Interaktion mit physikalischen Prozessen, ...



### d) *Was bedeutet Prüfgerechter Entwurf?*

Leitfaden zur vorbeugenden Vermeidung von Testbarkeitsproblemen (Folie 5.32):

- Sammlungen gut funktionierender Lösungen,
- typische Probleme und Workarounds,
- Checklisten, was dabei nicht vergessen werden darf, ...

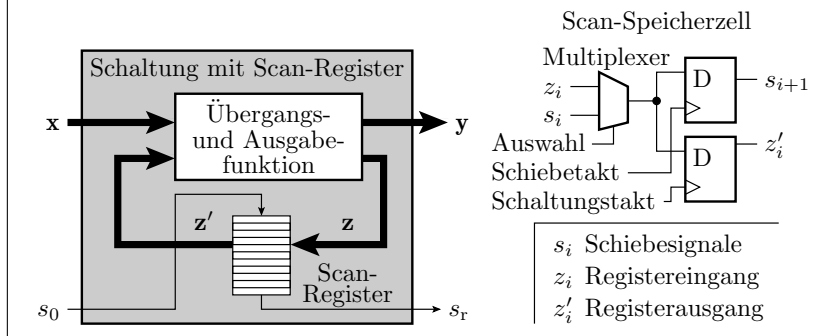


### Aufgabe 5.4: Test digitaler Schaltungen

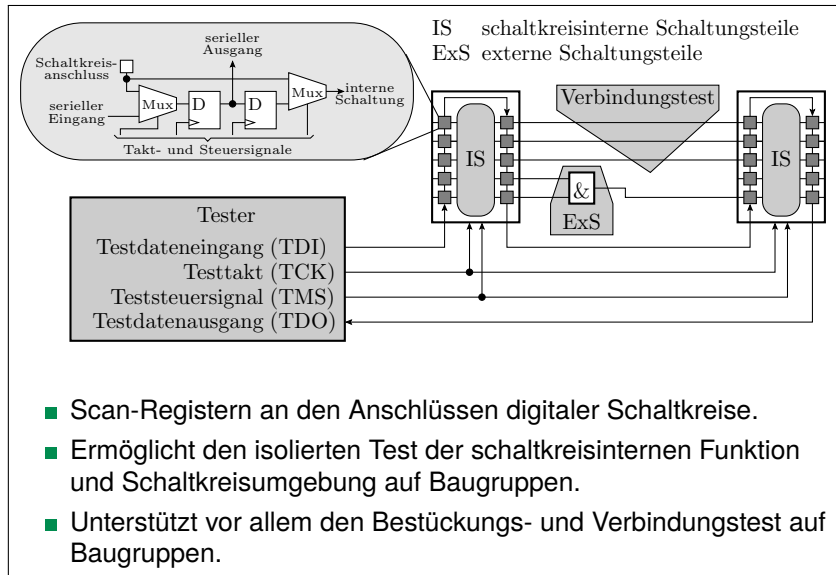
- a) *Was sind Scan-Register und was für ein Problem lösen sie?*
- b) *Was ist Boundary-Scan und welche Tests unterstützt er?*

### a) Was sind Scan-Register und was für ein Problem lösen sie?

Umschaltmöglichkeit interner Speicherelemente in ein seriell les- und beschreibbares Schieberegister, um Speicherzustände während des Tests lesen und schreiben zu können:



### b) Was ist Boundary-Scan und welche Tests unterstützt er?



- Scan-Registern an den Anschlüssen digitaler Schaltkreise.
- Ermöglicht den isolierten Test der schaltkreisinternen Funktion und Schaltkreisumgebung auf Baugruppen.
- Unterstützt vor allem den Bestückungs- und Verbindungstest auf Baugruppen.



## Fehlererkennende Codes





## Aufgabe 5.5: Arithmetischer Code

a) *Bilden Sie für den Bitvektor*

$$x = 110010001000011101_2$$

*das fehlererkennende Codewort durch vorzeichenfrei Multiplikation mit der Primzahl  $C = 10313$  (Produktbildung und Konvertierung in einen Binärvektor).*

b) *Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung der Kontrolle:*

`if y%C then <MF-Behandlung>`

*(Divisionsrest ungleich null).*

c) *Werden mit dem gewählten Code Verfälschung von  $y$  erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?*

---

$C$	Große ganzzahlige Konstante, bevorzugt eine Primzahl.
$x$	Zu verschlüsselndes Datenwort.
$y$	Verschüsseltes Datenwort.
$\%$	Divisionsrest.
$\mu_{MC}$	Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung.



a) *Bilden Sie für den Bitvektor*

$$x = 110010001000011101_2$$

*das fehlererkennende Codewort durch vorzeichenfrei Multiplikation mit der Primzahl  $C = 10313$ .*

Mit Octave (Matlab):

```
>> printf('y=0x%x\n', 0x3221D*10313)
```

Ausgabe: y=0x7e394245

binär: 0b111.1110.0011.1001.0100.0010.0100.0101

b) *Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung der Kontrolle:*

if  $y \% C$  then <MF-Behandlung>

$$(5.7) \quad \mu_{MC} = 1 - \frac{\#x}{\#x \cdot C} = 1 - \frac{1}{C}$$

$$\mu_{MC} \approx 1 - \frac{1}{10313} = 99,990\%$$



- c) *Werden mit dem gewählten Code Verfälschung von  $y$  erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?*

Division die Bildung des Divisionsrests sind lineare Operationen. Der Divisionsrest der Summe (Wert plus Verfälschung) ist die Summe der Divisionsreste. Verfälschung erkennbar, wenn nicht ohne Rest durch  $C$  teilbar. Divisionsrest für »3 und 14 invertiert«:

$$0b100\ 0000\ 0000\ 1000 \% 1031 = 16.392 \% 10313 = 6.097 \neq 0$$

Verfälschungen, die die Bits 3 und 14 invertieren, werden immer erkannt.



# Prüfkennzeichen



### Aufgabe 5.6: Prüfsummen

Gegeben sind die korrekte und drei verfälschte Bytefolgen:

K: 0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6

F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6

F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6

F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56

- a) *Bilden Sie die Prüfsummen durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge.*
- b) *Bilden Sie die Prüfsummen durch durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.*

An welche der beiden Prüfsummen sind die drei vorgegebenen Datenverfälschungen erkennbar?

---



K: 0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6

F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6

F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6

F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56

a) *Bilden Sie die Prüfsummen durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge.*

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13		0x13		0x13		0x13	
0xF2		0x33		0xF2		0xF1	
0x33		0xF2		0x37		0x90	
0xE6		0xE6		0xE6		0x56	



K: 0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6

F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6

F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6

F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56

Wert	(Teil-) Prüfsum.	Wert F1	(Teil-) Prüfsum.	Wert F2	(Teil-) Prüfsum.	Wert F3	(Teil-) Prüfsum.
0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13	0x13
0xF2	0x05	0x33	0x46	0xF2	0x05	0xF1	0x04
0x33	0x38	0xF2	0x38	0x37	0x3C	0x90	0x94
0xE6	0x1E	0xE6	0x1E	0xE6	0x22	0x56	0xEA

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytevertauschung von F1 nicht.



K: 0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6

F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6

F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6

F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56

b) Bilden Sie die Prüfsummen durch durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.

Wert	binär	Wert F1	binär	Wert F2	binär	Wert F3	binär
0x13		0x13		0x13		0x13	
0xF2		0x33		0xF2		0xF1	
0x33		0xF2		0x37		0x90	
0xE6		0xE6		0xE6		0x56	
⊕:							

⊕ – bitweise Exor





K: 0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6

F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6

F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6

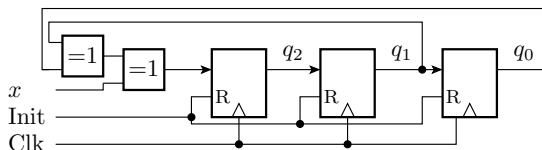
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56

Wert	binär	Wert F1	binär	Wert F2	binär	Wert F3	binär
0x13	0001 0011	0x13	0001 0011	0x13	0001 0011	0x13	0001 0011
0xF2	1111 0010	0x33	0011 0011	0xF2	1111 0010	0xF1	1111 0001
0x33	0011 0011	0xF2	1111 0010	0x37	0011 0111	0x90	1001 0000
0xE6	1110 0110	0xE6	1110 0110	0xE6	1110 0110	0x56	0101 0110
⊕:	0011 0100		00110100		0011 0000		0010 0100

⊕ – bitweise Exor

Die Verfälschungen F2 und F3 sind nachweisbar, die Bytevertauschung von F1 nicht.

## Aufgabe 5.7: Prüfkennzeichen mit LFSR



	$x$	$y_2$	$y_1$	$y_0$
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
...	...			

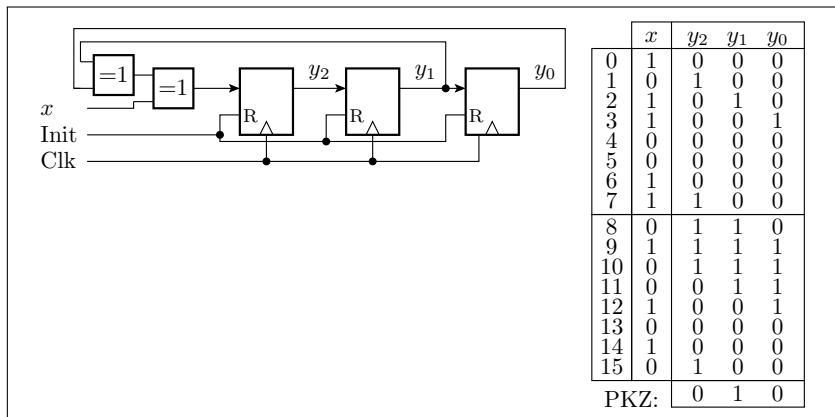
PKZ:

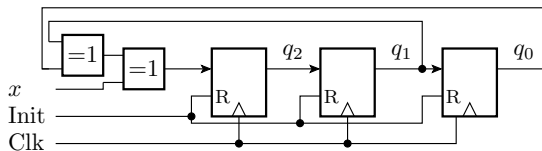
- a) Auf welches Prüfkennzeichen  $y = y_2y_1y_0$  wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet? Füllen Sie dazu die Tabelle in der Abbildung aus.
- b) Wie groß ist die zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung  $\mu_{FC}$ ?

$x_i$	Originalbits vor der Umwandlung in einen fehlererkennenden Code.
$g_i$	Bitstellen des Generatorpolynoms zur Multiplikation mit der Originalbitfolge.
$r$	Bitanzahl des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
$q_i$	Registerbit $i$ des linear rückgekoppelten Schieberegisters.
Init	Initialisierungssignal.
Clk	Taktsignal (Clock signal).



- a) Auf welches Prüfkennzeichen  $y = y_2y_1y_0$  wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet?





	$x$	$y_2$	$y_1$	$y_0$
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
...	...			

PKZ:

b) *Wie groß ist die zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung  $\mu_{FC}$ ?*

(1.35)

$$\mu_{MC} \geq 1 - 2^{-r}$$

$$\mu_{FC} = 1 - 2^{-3} = 87,5\%$$

$\mu_{MC}$

Zu erwartende Fehlfunktionsabdeckung.



# Fehlerkorrig. Codes



## Aufgabe 5.8: Kreuzparität

	Längsparität
1011001001101000	<input type="checkbox"/>
1100001110010011	<input type="checkbox"/>
0110010010101101	<input type="checkbox"/>
1000100001100101	<input type="checkbox"/>
1101001011010011	<input type="checkbox"/>
1101000010011110	<input type="checkbox"/>
1010011000010101	<input type="checkbox"/>
1011010010100110	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	Querparität

- Ergänzen Sie Bitwerte für die Längs- und Querparität?
- Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?



a) Ergänzen Sie Bitwerte für die Längs- und Querparität?

	Längsparität →
1011001001101000	1
1100001110010011	0
0110010010101101	0
1000100001100101	0
1101001011010011	1
1101000010011110	0
1010011000010101	1
1011010010100110	0
1000110111001111	
	Querparität

b) Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?

Die Invertierung des rot unterlegten Bits ist an einem Paritätsfehler in Zeile 6 und in Spalte 7 zu erkennen.

## Aufgabe 5.9: (8,12)-Hamming-Code

$b_{12}$	$b_{11}$	$b_{10}$	$b_9$	$b_8$	$b_7$	$b_6$	$b_5$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$
$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$

$$q_0 = x_0 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \qquad q_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7$$

$$q_1 = x_0 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \qquad q_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$$

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Zuordnung	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$
Kontrollbits	=	=	-	-	-	=	=	-	-	=	-	-

- a) *Bilden Sie die Codeworte für die darzustellenden Werte:  $w_1 = 0x73$ ,  $w_2 = 0x1D$  und  $w_3 = 0xD6$ ?*
- b) *Bestimmen Sie für die Codeworten  $c_4 = 0xA24$ ,  $c_5 = 0x5D6$  und  $c_6 = 0x141$ , ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?*





a) *Bilden Sie die Codeworte für  $w_1 = 0x73$ ,  $w_2 = 0x1D$  und  $w_3 = 0xD6$ ?*

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$	
Kontrollbits	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	<u>—</u>	
$x_1 = 0x73$													$b_1=0x$
$x_2 = 0x1D$													$b_2=0x$
$x_3 = 0xD6$													$b_3=0x$



Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$	
Kontrollbits	=	=	-	-	-	=	=	-	-	=	-	-	
$\mathbf{x}_1 = 0x73$	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	$\mathbf{b}_1 = 0x79E$
$\mathbf{x}_2 = 0x1D$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	$\mathbf{b}_2 = 0x1E7$
$\mathbf{x}_3 = 0xD6$	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	$\mathbf{b}_3 = 0xDB9$



- b)  $c_4 = 0xA24$ ,  $c_5 = 0x5D6$  und  $c_6 = 0x141$ , ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$	
Kontrollbits	=	=	-	-	-	=	=	-	-	=	-	-	
$b_4 = 0xA24$													$\Delta q_4 :$
$b_5 = 0x5D6$													$\Delta q_5 :$
$b_6 = 0x141$													$\Delta q_6 :$



b)  $c_4 = 0xA24$ ,  $c_5 = 0x5D6$  und  $c_6 = 0x141$ , ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert?

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	$x_7$	$x_6$	$x_5$	$x_4$	$q_3$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$q_2$	$x_0$	$q_1$	$q_0$	
Kontrollbits	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	
$b_4 = 0xA24$	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\Delta q_4 = 3$
$b_5 = 0x5D6$	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	$\Delta q_5 = 9$
$b_6 = 0x141$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	$\Delta q_6 = 15$

■ verfälschtes Bit

$x_4$ : 0b10100101 = 0xA5

$x_5$ : 0b01010011 = 0x58

$x_6$ : nicht korrigierbar



# Syntaxtest



### Aufgabe 5.10: Kontrollautomat

Ein (vereinfachter) Rechnerbefehlssatz besteht aus vier verschiedenen Befehlstypen:

```
addLrr, rr;
```

```
addiLrr, imm8;
```

```
subLrr, rr;
```

```
subiLrr, imm8;
```

□ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ('r0', 'r1', ... 'r31'); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ('0x00', '0x01', ..., '0xFF'; '0x' gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit Zifferenwerten '0' bis 'F').

- Beschreiben Sie das Befehlsformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.?*
- Entwerfen Sie einen deterministischen Kontrollautomaten auf Syntaxfehler als Graph für einen Moore-Automaten.*



```

addLrr, rr;
addiLrr, imm8;
subLrr, rr;
subiLrr, imm8;

```

□ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ('r0', 'r1', ... 'r31'); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ('0x00', '0x01', ..., '0xFF'; '0x' gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit Zifferenwerten '0' bis 'F').

a) *Beschreiben Sie das Befehlsformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.?*

```

Befehl = (('add' | 'sub'), '□', rr, ',', rr, ';' ) |
        ('addi' | 'subi', '□', rr, ',', imm8, ';' );
rr      = 'r', (('1' | '2'), z) | ('3', ('0' | '1') | z);

imm8    = '0x', h, h; z      = '0' | '1' | ... | '9';
h       = z | 'A' | 'B' | ... | 'F';

```

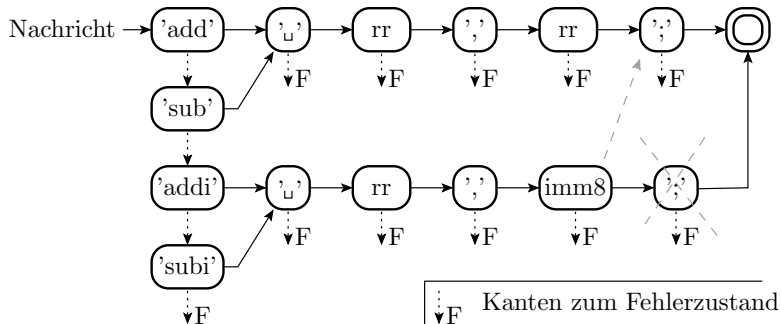


```

Befehl = (('add' | 'sub'), '□', rr, ',', rr, ';') |
        ('addi' | 'subi', '□', rr, ',', imm8, ';');
rr      = 'r', (('1' | '2'), z) | ('3', ('0' | '1') | z);

```

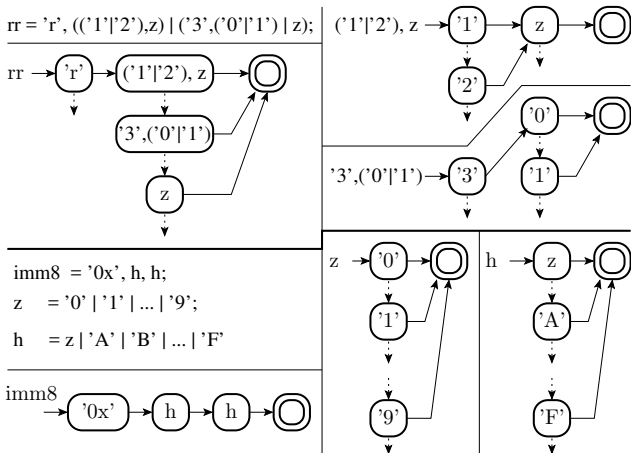
- b) *Entwerfen Sie einen deterministischen Kontrollautomaten auf Syntaxfehler als Graph für einen Moore-Automaten.*







imm8 = '0x', h, h; z = '0' | '1' | ... | '9';  
 h = z | 'A' | 'B' | ... | 'F';



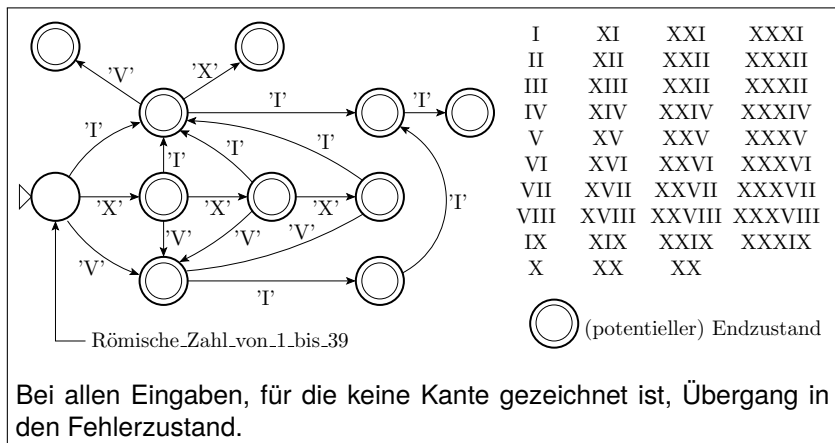


## Aufgabe 5.11: Syntaxtest für römische Zahlen

Entwerfen Sie einen Mealy-Kontrollautomaten (Abräumen der Zeichen an den Kanten) für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39.

Wert		Wert		Wert		Wert	
1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX		

Entwerfen Sie einen Mealy-Kontrollautomaten (Abräumen der Zeichen an den Kanten) für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39.





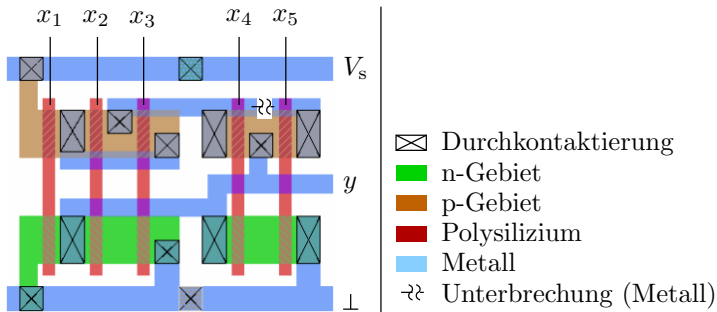
# Hardware



# Fehlermodellierung

### Aufgabe 6.1: Stuck-Open-Fehler!

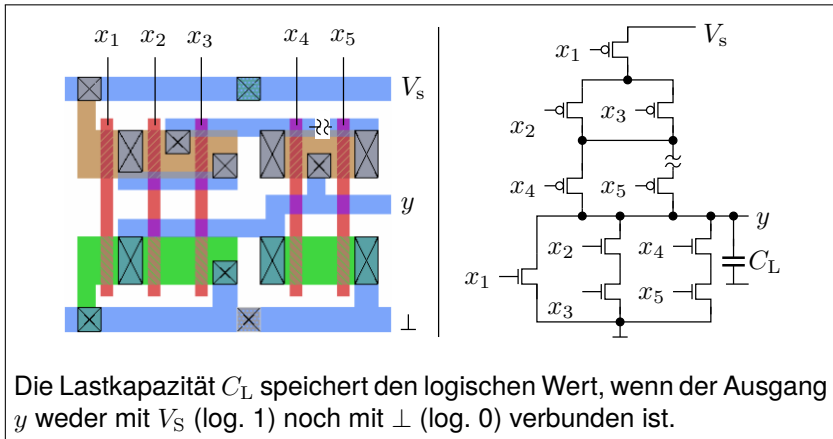
Gegeben ist ein Gatter-Layout mit einer unterbrochenen Metallverbindung zum Source des PMOS-Transistors am Eingang  $x_5$ :



a) Gatterschaltung mit eingezeichneter Unterbrechnung?

b) 2-Pattern-Test für den Fehlernachweis?

### a) Gatterschaltung mit eingezeichneter Unterbrechnung?



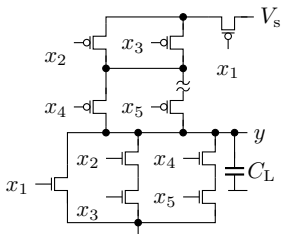
### b) 2-Pattern-Test für den Fehlernachweis?

Mit der Unterbrechung kann Ausgang  $y$  nicht über den PMOS-Transistor an  $x_5$  aufgeladen werden. Das Anregungspattern muss die Lastkapazität  $C_L$  entladen. Bedingung:

$$x_1 \vee x_2x_3 \vee x_4x_5$$

Das Nachweispattern muss  $C_L$  ohne Fehler über PMOS-Transistor an  $x_5$  aufgeladen. Bedingung:

$$\bar{x}_1 \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5$$



	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
A	*	*	*	*	1
N	0	1	0	*	0

A Anregungs-Pattern

N Nachweis-Pattern





# Ausfälle

## Aufgabe 6.2: Ausfallrate und mittlere Lebensdauer

Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit je einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit je einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit je einer Ausfallrate von 0,5 fit?

---

fit                      Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in  $10^9$  Stunden.



Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit je einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit je einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit je einer Ausfallrate von 0,5 fit?

(6.4)

$$\lambda_{\text{Sys}} = \sum_{i=1}^{\#Prt} \lambda_i$$

(6.3)

$$\mu_L = \int_0^{\infty} V(t) \cdot dt = \frac{1}{\lambda}$$

Die Ausfallraten addieren sich. Gesamtausfallrate:

$$\lambda_{\text{Sys}} = 30 \cdot 150 \text{ fit} + 100 \cdot 30 \text{ fit} + 500 \cdot 0,5 \text{ fit} = 7750 \text{ fit}$$

Zu erwartende Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$\mu_{L.\text{Sys}} = \frac{1}{\lambda_{\text{Sys}}} = \frac{1}{7750 \cdot 10^{-9} \text{ h}^{-1}} = 129 \cdot 10^3 \text{ h} = 14,7 \text{ Jahre}$$

 $\lambda_{\text{Sys}}$ 

Ausfallrate des Systems.

#C

Anzahl der für das Funktionieren erforderlichen Bausteine.

 $\lambda_i$ Ausfallrate Komponente  $i$ . $\mu_L$ 

Zu erwartende Lebensdauer.



## Aufgabe 6.3: Verteilung der Lebensdauer

Bei einem redundanten System aus dem aktivem System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten haben alle vier Komponenten eine exponentialverteilte Lebensdauer  $L_K$  mit derselben Ausfallrate  $\lambda_K$ .

Aktive +4× kalte Reserve mit  $L_K \sim \text{Exp}(\lambda)$ , Lösungshinweise:  
 $\text{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$  und

- Was für eine Verteilung hat die Lebensdauer  $L_{\text{Sys}}$  des Gesamtsystems?*
- Welche Dichtefunktionen haben die Lebensdauern der Komponenten und die Lebensdauer des Gesamtsystems?*
- Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Lebensdauer des Gesamtsystems?*

---

$L_K$	Lebensdauer einer einzelnen Komponente, Zufallsvariable.
$\lambda_K$	Ausfallrate einer einzelnen Komponente.
$L_{\text{Sys}}$	Lebensdauer des Gesamtsystem, Zufallsvariable.
$\text{Exp}(\lambda)$	Exponentialverteilung, $\lambda$ – Verteilungsparameter.
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma-Verteilung, $\alpha$ – Formparameter, $\beta$ – Skalenparameter.

Aktive +4× kalte Reserve mit  $L_K \sim \text{Exp}(\lambda)$ , Lösungshinweise:

$\text{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$  und

a) *Was für eine Verteilung hat die Lebensdauer  $L_{\text{Sys}}$  des Gesamtsystems?*

Eine Exponentenverteilung mit dem Verteilungsparameter  $\lambda$  ist eine Gamma-Verteilung mit Formfaktor  $\alpha = 1$  und Skalenparameter  $\beta = \lambda$ :

$$L_K \sim \text{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$$

Ein System mit drei identischen kalten Reserveeinheiten hat die vierfache Lebensdauer. Bei gleichen Skalenparametern addieren sich die Formfaktoren:

$$L_{\text{Sys}} = 4 \cdot L_K \sim \mathcal{G}(4, \lambda)$$



Aktive +4× kalte Reserve mit  $L_K \sim \text{Exp}(\lambda)$ , Lösungshinweise:

$\text{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$  und

b) *Welche Dichtefunktionen haben die Lebensdauern der Komponenten und die Lebensdauer des Gesamtsystems?*

Exponentialverteilte Dichte der Lebensdauern der Komponenten:

$$f_{\text{LK}}(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Gamma-verteilte Dichte der Lebensdauer des Gesamtsystems:

$$f_{\text{LSys}}(t) = \frac{\lambda^4}{\Gamma(4)} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3 = \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot t^3$$

$\Gamma(\dots)$

Gamma-Funktion.

$t$

Lebensdauer.



Aktive +4× kalte Reserve mit  $L_K \sim \text{Exp}(\lambda)$ , Lösungshinweise:  
 $\text{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$  und

c) *Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Lebensdauer des Gesamtsystems?*

(4.9)  $\text{sd}[X] = \sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

$$\mu_{\text{LSys}} = \frac{4}{\lambda}$$

$$\sigma_{\text{LSys}}^2 = \frac{4}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{\text{LSys}} = \frac{2}{\lambda}$$

Die Lebensdauer des Gesamtsystems hat den vierfachen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung der der Komponenten.

$\mu, \sigma$  Erwartungswert, Standardabweichung.

## Aufgabe 6.4: Ausfallrate von Glühlampen

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

- Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?*
- Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?*





Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

a) *Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?*

Mittlere Ausfallrate an den ersten 18 Tagen:

$$\begin{aligned}\lambda_{1-18} &= \frac{400 \text{ Ausfälle}}{10.000 \text{ Objekte} \cdot 18 \text{ Tage} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{Tag}}} \\ &= 9,26 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 92.600 \text{ fit}\end{aligned}$$

---

$\lambda$	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in $10^9$ Stunden.



Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

b) *Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?*

Ausfallrate am 19 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{5 \text{ Ausfälle}}{9.600 \text{ Objekte} \cdot 24 \text{ h}} = 2,17 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 21.700 \text{ fit}$$

Das ist eine signifikante Abnahme, die darauf schließen lässt, dass sich die Glühlampen noch in der Frühphase befinden, in der die Ausfallrate mit der Nutzungsdauer abnimmt.

## Aufgabe 6.5: Dauerbetrieb oder Ausschalten

Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate  $\lambda = 9000$  fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_{\text{FSO}} = 10^{-5}$  ausfällt.

*Ab welcher Ausschaltdauer  $t_{\text{off}}$  erhöht Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?*

---

$\lambda$	Ausfallrate (Failure rate).
fit	Failure In Time, Anzahl der Ausfälle in $10^9$ Stunden.
$p_{\text{FSO}}$	Ausfallwahrscheinlichkeit beim Einschalten.
$t_{\text{off}}$	Ausschaltdauer.



Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate  $\lambda = 9000$  fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_{\text{FSO}} = 10^{-5}$  ausfällt.

*Ab welcher Ausschaltdauer  $t_{\text{off}}$  erhöht Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?*

$$(6.1) \quad V(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Die gesuchte Ausschaltdauer  $t_{\text{off}}$  ist die Zeit, ab der die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im normalen Betrieb größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{\text{FSO}}$  beim Einschalten ist:

$$\begin{aligned} 1 - V(t_{\text{off}}) &= 1 - e^{-\lambda \cdot t_{\text{off}}} < p_{\text{FSO}} \\ t_{\text{off}} &> -\frac{\ln(1 - p_{\text{FSO}})}{\lambda} = -\frac{\ln(1 - 0,01\%)}{9000 \cdot 10^{-9} \text{h}^{-1}} \approx 11 \text{ h} \end{aligned}$$

$V(t_{\text{off}})$  Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn das System für  $t_{\text{off}}$  eingeschaltetet bleibt.



### Aufgabe 6.6: Voralterung

- a) *Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?*
  - b) *Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre?*
  - c) *Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?*
-



- a) *Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?*

Voralterung erhöht die Ausfallrate auch für die potentiellen Schwachstellen, die Frühausfälle verursachen. Die kränklichen Bauteile sterben und werden vor dem Einsatz ersetzt. Unter normalen Betriebsbedingungen ist die Ausfallrate vorgealterter Bauteile geringer und die mittlere Lebensdauer höher.

- b) *Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre?*

Der übertaktete Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung ist eine Voralterung. Es überleben die Systeme ohne Kinderkrankheiten. Die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre ist unter Normalbedingungen (ohne Übertaktung) geringer. 10



- c) *Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?*

In der Hauptnutzungsphase erhöht sich während des übertakteten Betriebs mit erhöhter Betriebsspannung die Ausfallrate und ist ohne Über-taktung wieder normal. Die Ermüdungsphase, in der die Ausfallrate zu-nimmt, wird aber eher erreicht. Wenn ein Zeitintervall nach der Über-taktung und vor Beginn der Ermüdungsphase betrachtet wird, erhöht die Übertaktung die zu erwartende Lebensdauer der am Anfang des Betrachtungszeitraums noch lebenden Systeme.



# Software





# Sonstiges



# Gamma- und Exponentialvert.



### Aufgabe 8.1: Modell von Musa, Goel und Okumoto

Das am häufigsten zitierte Zuverlässigkeitswachstumsmodell ist das von Musa, Goel und Okumoto (MGO-Modell\*). Es unterstellt für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht beseitigten Fehler und der Nachweiszeit  $t$  eine abklingende e-Funktion:

$$\mu_F(t) = a \cdot e^{-bt}$$

- a) Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit  $T$  unterstellt?
- b) Was für eine Dichtefunktion wird für die MF-Rate unterstellt?

---

$\mu_F$	Zu erwartende Fehleranzahl nach Test und Beseitigung aller erkennbaren Fehler.
$a, b$	Experimentell abzuschätzende Modellparameter.
$t$	Testzeit.
$T$	Nachweiszeit, Zufallsvariable.
*	Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement, 2003.



$$\mu_F(t) = a \cdot e^{-bt}$$

a) Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit  $T$  unterstellt?

Die Verteilung der Nachweiszeit  $T$  als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler spätestens nach einer Testdauer  $t$  nachgewiesen wird, ist die zu erwartende Fehlerabdeckung:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mu_{FC}(t)$$

Mit

$$\mu_{FC}(t) = 1 - \frac{\mu_F(t)}{\mu_F(t=0)} = 1 - e^{-bt}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-bt}$$

Für die Nachweiszeit unterstellt das MGO-Modell statt einer Pareto-Verteilung eine Exponentialverteilung mit  $\lambda = b$ .

$\lambda$  Parameter der Exponentialverteilung.



$$\mu_F(t) = a \cdot e^{-bt}$$

b) Was für eine Dichtefunktion wird für die MF-Rate unterstellt?

Mit

$$\mu_{FC}(t) = 1 - e^{-bt}$$

aus Aufgabenteil a und  $N - N_0 = \frac{t}{MTS}$ :

$$1 - \mu_{FC}(t) = e^{-bt} = \int_0^1 e^{-\frac{\zeta \cdot t}{MTS}} \cdot h(\zeta) \cdot d\zeta$$

Anschauliche Lösung:

$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \zeta = b \cdot MTS \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das MGO-Modell unterstellt für alle Fehler dieselbe Fehlfunktionsrate.



## Aufgabe 8.2: Fehleranzahl und Zuverlässigkeit

Ein Testobjekt hat nach Beseitigung aller mit  $N_1 = 10^2$  Tests erkennbaren Fehler abschätzungsweise noch 100 Fehler.

Pareto-verteilte Nachweislänge mit Formfaktor  $K \in \{0,3, 0,4, \dots 0,7\}$ .

---

$$N_1 = 100, \mu_F(N_1) = 100, K \in \{0,3, 0,4, \dots 0,7\}.$$

- a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler nach  $N_2 = 10^3$  und  $N_3 = 10^4$  Tests?*
- b) *Wie groß ist die zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach  $N_2 = 10^3$  und  $N_3 = 10^4$  Tests?*

---

$N$	Anzahl der Tests.
$\mu_F(N)$	Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach $N$ Tests nicht erkannt und beseitigt sind.
$K > 0$	Formfaktor der Pareto-Verteilung.



$N_1 = 100$ ,  $\mu_F(N_1) = 100$ ,  $K \in \{0,3, 0,4, \dots 0,7\}$ .

a) *Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler nach  $N_2 = 10^3$  und  $N_3 = 10^4$  Tests?*

$$\mu_F(N_2) = \mu_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 10^{-K}$$

$$\mu_F(N_3) = \mu_F(N_1) \cdot \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{-K} = 100 \cdot 100^{-K}$$

	$K = 0,3$	$K = 0,4$	$K = 0,5$	$K = 0,6$	$K = 0,7$
$\mu_F(N_2)$	50,1	39,8	31,6	25,1	20,0
$\mu_F(N_3)$	25,1	15,8	10,0	6,3	4,0



$$N_1 = 100, \mu_F(N_1) = 100, K \in \{0,3, 0,4, \dots 0,7\}.$$

b) *Wie groß ist die zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach  $N_2 = 10^3$  und  $N_3 = 10^4$  Tests?*

$$R_F(N_2) = \frac{N_2}{K \cdot \mu_F(N_2)} = \frac{1.000}{K \cdot 100 \cdot 10^{-K}} = \frac{10 \cdot 10^K}{K} = \frac{10^{1+K}}{K}$$

$$R_F(N_3) = \frac{N_3}{K \cdot \mu_F(N_3)} = \frac{10.000}{K \cdot 100 \cdot 100^{-K}} = \frac{100 \cdot 100^K}{K} = \frac{100^{1+K}}{K}$$

	$K = 0,3$	$K = 0,4$	$K = 0,5$	$K = 0,6$	$K = 0,7$
$R_F(N_2)$	66,5	62,8	63,2	66,4	71,6
$R_F(N_3)$	1330	1580	2000	2640	3590

$R_F(N)$  Fehlerbezogene Teilzuverl. nach Beseitigung aller mit  $N$  Tests nachweisbaren Fehler.





## Aufgabe 8.3: Fehleranzahl und MF-Rate

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert  $N_1$  auf  $N_2 = 2 \cdot N_1$  hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

- a) *Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber  $N_1$  ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler paretoverteilt ist, erforderlich, um die MF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?*
- b) *Um welchen Faktor verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der Testsatzverlängerung aus Aufgabenteil a?*

---

$N_1, N_2$	Testanzahl mit bekannter Fehlfunktionsrate bzw. zu erwartender Fehleranzahl.
$K$	Formfaktor der Dichte der Fehlfunktionsrate ( $0 < K < 1$ ).
$\zeta_F$	Fehlfunktionsrate durch Fehler.



Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert  $N_1$  auf  $N_2 = 2 \cdot N_1$  hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

a) *Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber  $N_1$  ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler paretoverteilt ist, erforderlich, um die MF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?*

$$(2.24) \quad K = \log \left( \frac{\zeta_F(N_1)}{\zeta_F(N_2)} \right) / \log \left( \frac{N_2}{N_1} \right) - 1$$

$$(2.22) \quad \zeta_F(N_2) \stackrel{(\leq 1)}{=} \zeta_F(N_1) \cdot \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^{-(K+1)}$$

Formfaktor der Verteilung der MF-Rate bzw. der Nachweislänge:

$$K = -\frac{\log(1/3)}{\log(2)} - 1 = 0,585$$

Erforderliche Vergrößerung der effektiven Testanzahl:

$$\frac{N_2}{N_1} = \left( \frac{\zeta_F(N_2)}{\zeta_F(N_1)} \right)^{-\frac{1}{K+1}} = 100^{\frac{1}{1,585}} = 18,3$$

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert  $N_1$  auf  $N_2 = 2 \cdot N_1$  hat die MF-Rate durch Fehler etwa auf ein Drittel reduziert.

- b) *Um welchen Faktor verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der Testsatzverlängerung aus Aufgabenteil a?*

$$\frac{\mu_F(N_2)}{\mu_F(N_1)} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{-K} = 18,3^{-0,585} = 18,27\%.$$

$\mu_F(N)$  Zu erwartende Anzahl der Fehler, die nach  $N$  Tests nicht erkannt und beseitigt sind.