



Elektronik II

Foliensatz 3: Simulation mit zeitveränderlichen Größen

G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (E2_F3)
27. Mai 2025



Inhalt F3: Zeitveränderliche Größen

Simulationsarten

Zeitdiskrete Sim.

2.1 Geschaltete RC-Glieder

2.2 Gatterschaltzeiten

2.3 Kippstufen

2.4 Sinussignale

2.5 Testsignale

Frequenzbereich

3.1 Frequenzgang

3.2 Laplace-Transformierte

3.3 Verstärker

3.4 Filter

Spektralanalyse

4.1 Fouriertransformation

4.2 Klirrfaktor

Rauschen

5.1 Wärmerauschen

5.2 Rauschquellen

5.3 Stromrauschen

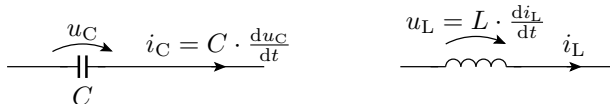
5.4 Bipolartransistoren



Simulationsarten

Simulation mit zeitveränderlichen Größen

Bei der Berücksichtigung zeitveränderlicher Spannungen und Ströme sind zusätzlich kapazitive Umladeströme und induzierte Spannungen zu berücksichtigen:



$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{u_C} \\
 \parallel \\
 \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \\
 C
 \end{array}
 \quad
 i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}} \\
 \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \\
 i_L
 \end{array}$$

Aus den Maschen- und Knotengleichungen werden große Differenzialgleichungen. Es gibt zwei Simulationsarten für diese DGL-Systeme:

- zeitdiskret (Analyseart »trans«, **TRANS**ition) und
- Frequenzbereich (Analyseart »ac«, **Al**ternate **C**urrent).

Die zeitdiskrete Simulation ist auch für nichtlineare, die Simulation im Frequenzbereich nur für lineare Schaltungen geeignet.



1. Simulationsarten

Die Brücke zwischen beiden Simulationsarten bildet die Fourier-Transformation (Analyseart »four«). Sie berechnet die Spektren gemessener oder berechneter Signalverläufe. Die Ergebnisse müssen in Amplitude und Phase mit denen der »ac«-Simulation übereinstimmen.

Veränderungen des Spektrums durch nichtlineare Verzerrungen werden durch den Klirrfaktor beschrieben. Der Klirrfaktor lässt sich auch in der Analyseart »four« berechnen.

Elektronische Bauteile (Widerstände, pn-Übergänge) rauschen. Das Rauschen ist ein Störsignal, das dem Nutzsignal überlagert ist. Die Auswertbarkeit eines Signals verlangt einen hinreichend großen Signal-Rausch-Abstand (SNR). Rauschgrößen werden in der Analyseart »noise« berechnet.



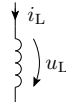
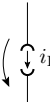


Zeitdiskrete Sim.



Zeitdiskrete Simulation

- C und L werden durch zeitveränderliche Quellen nachgebildet:

	Original	Ersatz
Kapazität		 $u_C(n+1) = u_C(n) + \frac{\Delta t}{C} \cdot i_C(n)$
Induktivität		 $i_L(n+1) = i_L(n) + \frac{\Delta t}{L} \cdot u_L(n)$

- Berechnung von i und u in diskreten Zeitschritten:

Wiederhole für jeden Zeitschritt:

stationäre Schaltungsanalyse

Berechnen der Quellwerte für den Folgeschritt

- Auch für nichtlineare Schaltungen geeignet.

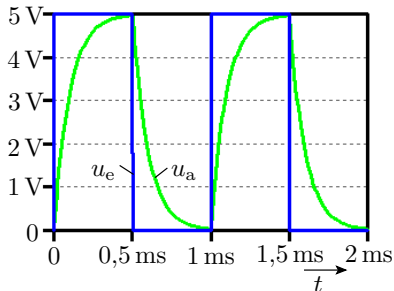
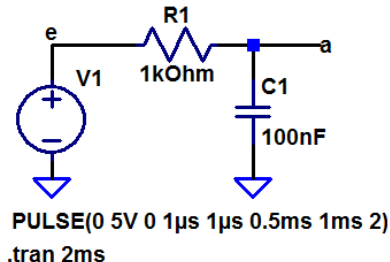


Geschaltete RC-Glieder

Geschaltete RC-Glieder

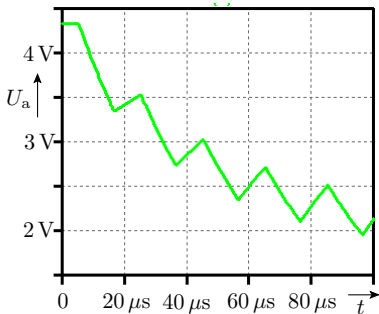
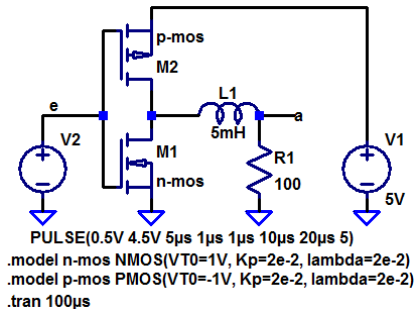
Geschaltete RC- und RL-Glieder dienen in Elektronik I zur Abschätzung des Zeitverhaltens geschalteter Systeme (Digitalschaltungen, Pulsweitenmodulation, ...).

Bei einem geschalteten RC-Glied streben Strom und Spannung mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$ und beim geschalteten RL-Glied mit der Zeitkonstanten $\tau = \frac{L}{R}$ gegen ihren stationären Wert.



Zurückführung auf geschaltete RC- oder RL-Glieder

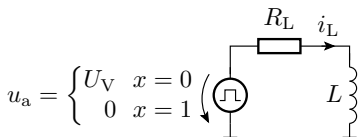
Schaltungen mit einer geschalteten Quelle und nur einer wesentlichen Kapazität oder Induktivität lassen sich auf das Modell eines geschalteten RC- bzw. RL-Glieds zurückführen.



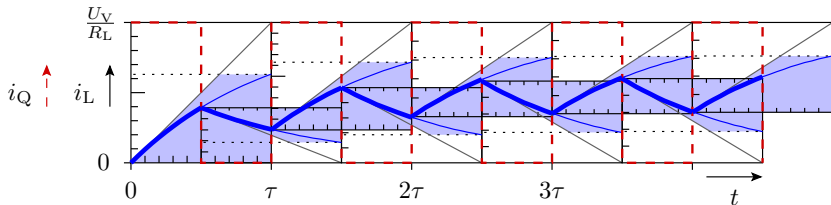
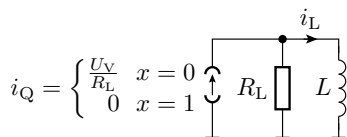
Frage: Wie sieht das funktionsgleiche geschaltete RL-Glied aus?

Elektronik 1, Foliensatz F6, Folie 48:

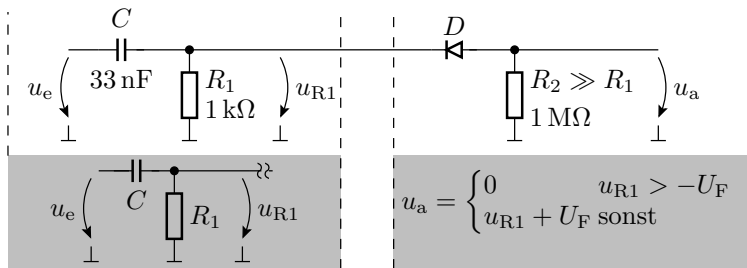
Ersatz des Inverters



funktionsgleiches RL-Glied

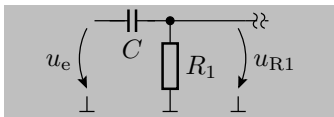


Bereichsweise Annäherung durch eine RC-Glied

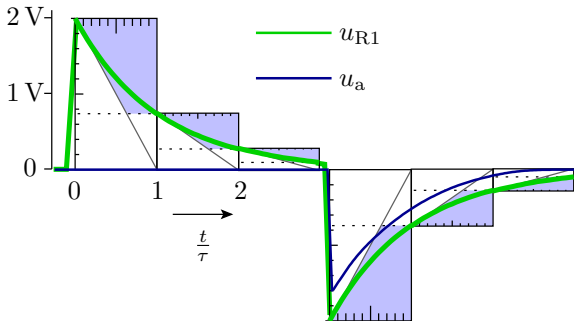


Konstruktion der Ersatzschaltung für Überschläge:

- Wegen $R_2 \gg R_1$ kann die Diode näherungsweise als Unterbrechung betrachtet werden. Übrig bleibt ein RC-Glied mit $\tau = R_1 \cdot C = 33 \mu\text{s}$.
- Für negative $u_{R1} < -U_F$ ist die Ausgangsspannung $u_{R1} - U_F$ und sonst null.

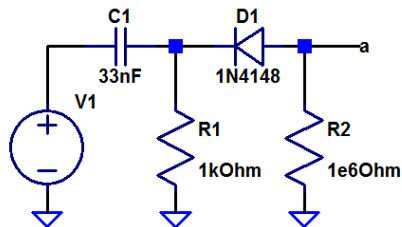


$$u_a = \begin{cases} 0 & u_{R1} > -U_F \\ u_{R1} + U_F & \text{sonst} \end{cases}$$

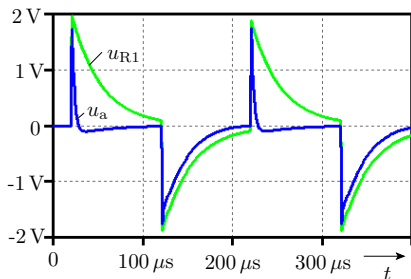


u_{R1} hat nach dem Sprung als Anfangswert die Sprunghöhe (beim Ausschalten von u_e negativ) und strebt gegen null. Die Ausgangsspannung müsste bei positiven Eingangssprüngen null bleiben und bei negativen müsste ein Nadelimpuls erscheinen.

Simulation



PULSE(0 2V 20 μ s 1 μ s 1 μ s 100 μ s 200 μ s 3)
 .tran 400 μ s



Abweichend vom geschätzten Ausgangssignalverlauf gibt es auch bei der steigenden Flanke am Ausgang einen Nadelimpuls mit der Zeitkonstanten $\tau_2 \approx 4 \mu\text{s}$. Das Simulationsmodell der Diode hat offenbar im Sperrbereich eine Kapazität von:

$$C_D \approx \frac{\tau_2}{R_2} = 4 \text{ pF}$$

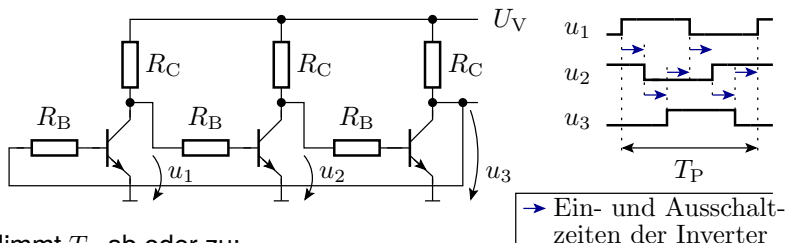
Überschläge vernachlässigen immer viele Details.



Gatterschaltzeiten

Ringinverter

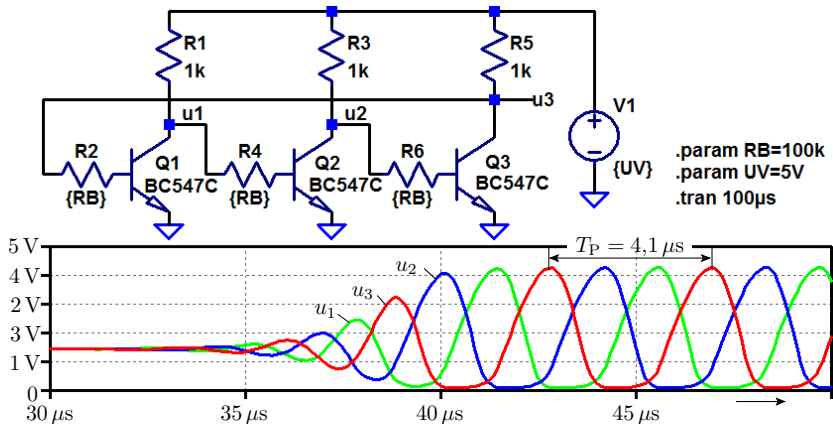
Die drei einfachen Transistorinverter sind zu einem Ringinverter verschaltet. Die Periode des Ausgangssignals ist die Summe der drei Ein- und Ausschaltzeiten¹.



Nimmt T_P ab oder zu:

- wenn $R_B \downarrow \Rightarrow$ mehr Übersteuerung, $T_P \uparrow?$
- wenn $U_V \downarrow \Rightarrow$ weniger Übersteuerung, $T_P \downarrow?$

¹Der Ringinverter diente in Elektronik I, F8, Abschn 3.2 zur Illustration der Zusatzverzögerung durch Übersteuerung.



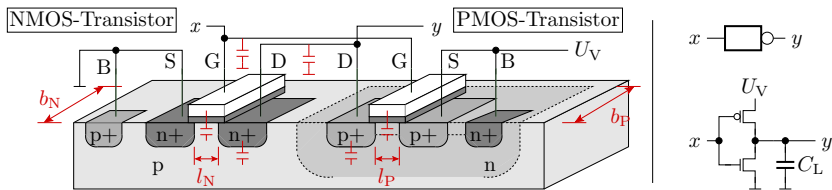
Die Simulation zeigt das Gegenteil des erwarteten Verhaltens²:

- Verringerung $R_B \rightarrow 33 \text{ k}\Omega$: Verringerung von $T_P \rightarrow 2 \mu s$
- Verringerung $U_V \rightarrow 2,5 \text{ V}$: Vergrößerung von $T_P \rightarrow 4,5 \mu s$
- Schottky-Diode zwischen Basis und Kollektor: $T_P \rightarrow 11,5 \mu s$

²Die Transistoren übersteuern nicht? Modell ist unvollständig? ...

Verzögerung eines CMOS-Inverters

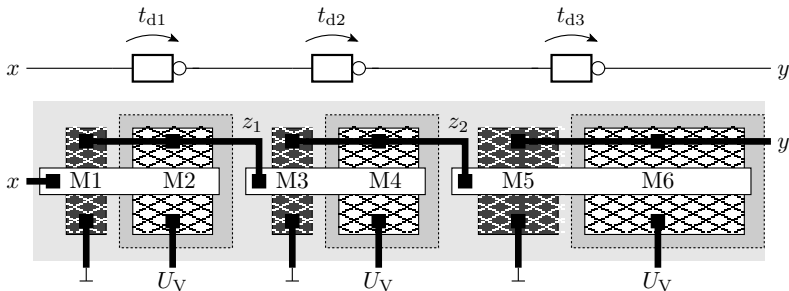
Bei einem CMOS-Inverter wird die Lastkapazität C_L beim Ausschalten über den NMOS-Transistor entladen und beim Einschalten über den PMOS-Transistor aufgeladen. Die Lastkapazität setzt sich zusammen aus den Kapazitäten der pn-Übergänge am Inverterausgang (Source-Bulk, Drain-Bulk) und den Gate-Kapazitäten an den Eingängen der Folgegatter.



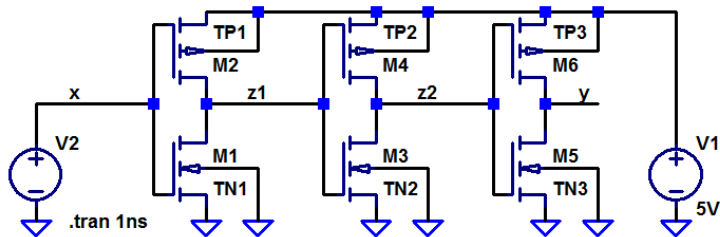
Die Umladezeiten verhalten sich proportional zur Lastkapazität und umgekehrt proportional zu den Umladeströmen.



Die Umladeströme verhalten sich proportional zum Verhältnis aus Kanalbreite und Kanallänge: $w_{N/P} = b_{N/P}/l_{N/P}$. Die Ein- und Ausschaltzeit wird folglich erheblich von der Geometrie abhängen. In der nachfolgenden Inverterkette haben die NMOS-Transistoren M_1 und M_3 die relative Breite 1,5 und M_5 drei. Die PMOS-Transistoren sind wegen der nur halb so großen Ladungsträgerbeweglichkeit doppelt so breit gewählt.



Wie wirkt sich das auf die Schaltverzögerungen aus?



PULSE(0 5V 50p 50p 350p 800p 2)

.model myNMOS NMOS(VT0=0.73V Kp=69μ lambda=33m tox=25n CJ=360μ CJSW=250p)

.model myPMOS PMOS(VT0=-0.75V, Kp=23μ, lambda=55m tox=25n CJ=340μ CJSW=220p)

.model TN1 ako:myNMOS l=1μ w=1μ ad=1.5p as=1.5p pd=5μ ps=5μ

.model TP1 ako:myPMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

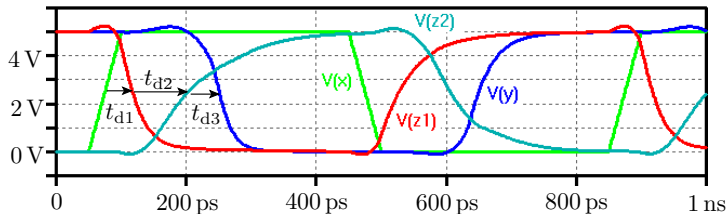
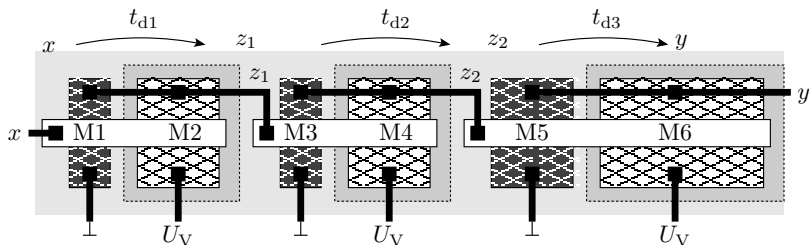
.model TN2 ako:myNMOS l=1μ w=1μ ad=1.5p as=1.5p pd=5μ ps=5μ

.model TP2 ako:myPMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

.model TN3 ako:myNMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

.model TP3 ako:myPMOS l=1μ w=4μ ad=6p as=6p pd=11μ ps=11μ

Parameter: l – Kanallänge; w – Kanalbreite; ad bzw. as – Fläche des Drain- bzw. Source-Gebiets; pd bzw. ps – Umfang des Drain- bzw. Source-Gebiets; Angaben in Metern bzw. Quadratmetern).



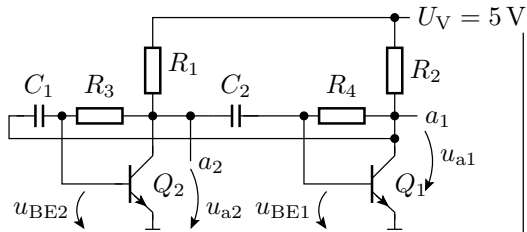
Die Verzögerung t_{d1} des ersten Inverters ist deutlich kürzer als t_{d2} des zweiten Inverters mit der doppelten Last und t_{d3} ist wieder kürzer, da ohne Last.



Kippstufen

Astabiler Multivibrator

Alter Schaltungsklassiker:



$$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 101 \text{ k}\Omega^*$$

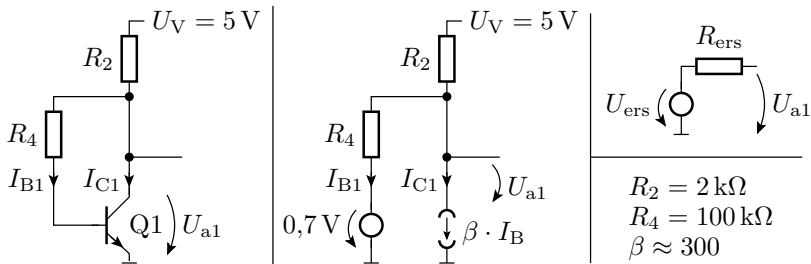
$$R_4 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 10 \text{ nF}$$

* Unsymmetrie zur Verkürzung der Anschlagzeit

Ohne C_1 und C_2 arbeiten beide Transistoren im Normalbereich. Ausgangsspannung $\approx 1,31 \text{ V}$ (siehe nächste Folie). Eine fallende Flanke am Kondensatoreingang schaltet den nachfolgenden Transistor bis zum Umladen des Kondensators aus und eine steigende schaltet ihn voll ein.

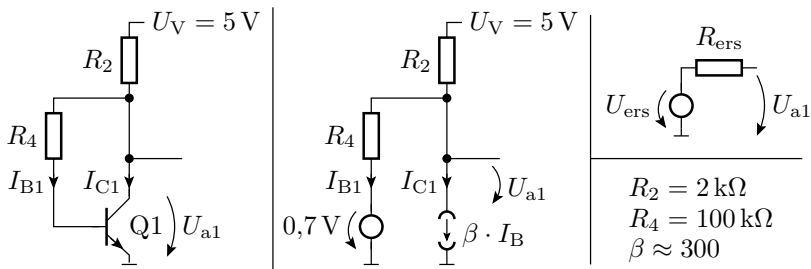
Ersatzschaltung ohne Kapazitäten



$$I_{B1} = \frac{U_{a1} - 0,7\text{ V}}{R_4}$$

$$U_{a1} = U_V - (1 + \beta) \cdot R_2 \cdot I_{B1} = U_V - (1 + \beta) \cdot R_2 \cdot \frac{U_{a1} - 0,7\text{ V}}{R_4}$$

$$U_{a1} = \frac{U_V + (1 + \beta) \cdot \frac{R_2}{R_4} \cdot 0,7\text{ V}}{1 + (1 + \beta) \cdot \frac{R_2}{R_4}} \approx \frac{5\text{ V} + 301 \cdot \frac{2}{100} \cdot 0,7\text{ V}}{1 + 301 \cdot \frac{2}{100}} \approx 1,3\text{ V}$$



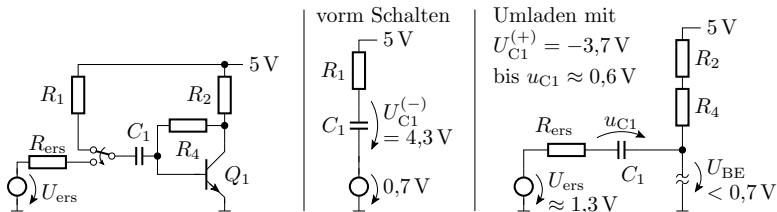
- U_{ers} ist U_{a1} , wenn kein Ausgangsstrom fließt, d.h. der berechnete Wert:

$$U_{ers} = U_{a1} \approx 1,3\text{ V}$$

- Der Ersatzwiderstand der Ersatzschaltung ohne Quellen:

$$R_{ers} = R_2 \parallel \frac{R_4}{1 + \beta} \approx 286\ \Omega$$

Rechte Stufe als geschaltetes RC-Glied

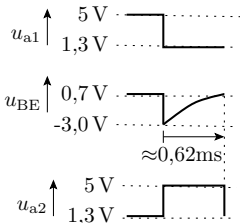
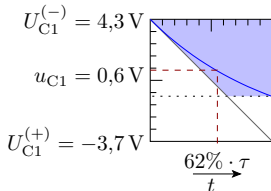


$$\tau = C_1 \cdot (R_{ers} + R_2 + R_4)$$

$$\tau \approx 1 \text{ ms}$$

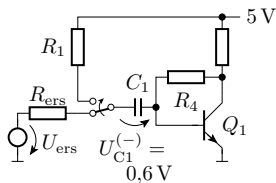
$$t_1 = -\tau \cdot \ln\left(1 - \frac{3,7 \text{ V}}{8 \text{ V}}\right)$$

$$t_1 \approx 0,62 \text{ ms}$$



Wenn Transistor Q_2 einschaltet, schaltet Q_1 für eine Zeit t_1 aus.

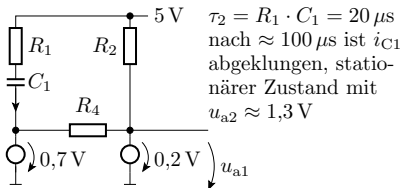
Umladen von C_1 beim Zurückschalten



$$i_{C1}(0) \approx \frac{2,9\text{V}}{2\text{k}\Omega}$$

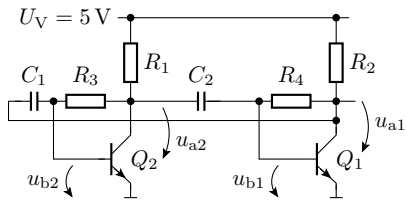
$$\gg \frac{4,8\text{V}}{\beta \cdot R_2}$$

Transistor übersteuert

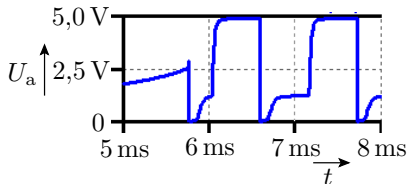
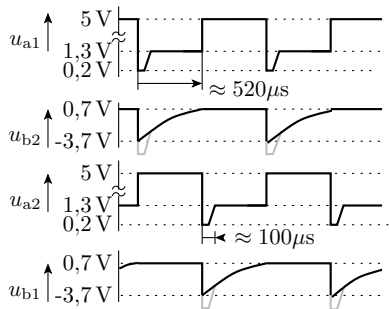
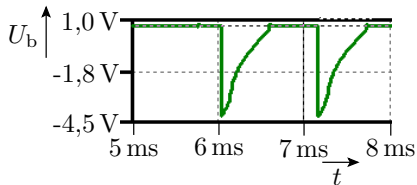


- Beim Zurückschalten liefert C_1 viel mehr Basisstrom als R_4 im stationären Zustand. Transistor übersteuert: $u_a \approx 0,2 \text{ V}$.
- Umladung von C_2 über R_1 nach etwa $100 \mu\text{s}$ abgeschlossen. Stationärer Zustand $u_a \approx 1,3 \text{ V}$.

Funktion der Gesamtschaltung

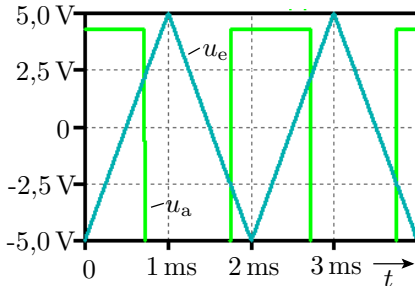
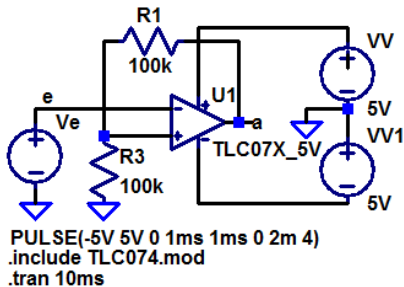


$$\begin{aligned}
 R_1 = R_2 &= 2 \text{ k}\Omega & R_3 &= 101 \text{ k}\Omega \\
 C_1 = C_2 &= 10 \text{ nF} & R_4 &= 100 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

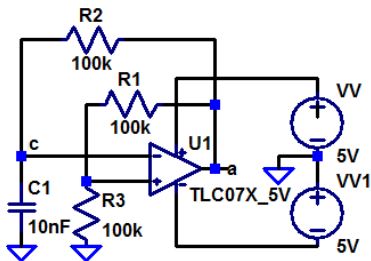


Schwellwertschalter mit Hysterese

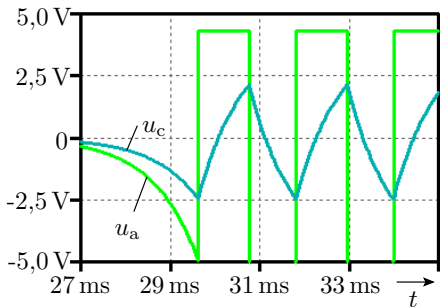
In Elektronik I, F6, Abschn. 1.6 wurde ein RC-Oszillator mit einem Schwellwertschalter mit Hysterese konstruiert.



Erweiterung zum Rechtecksignalgenerator



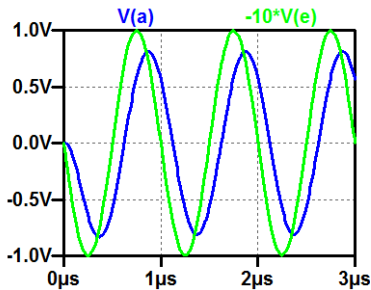
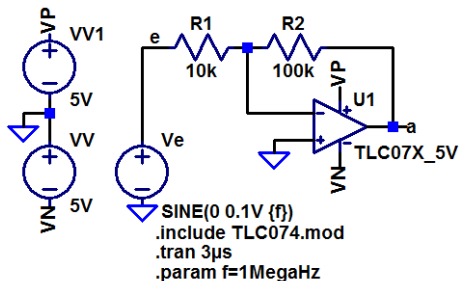
```
.include TLC074.mod
.tran 35ms
```



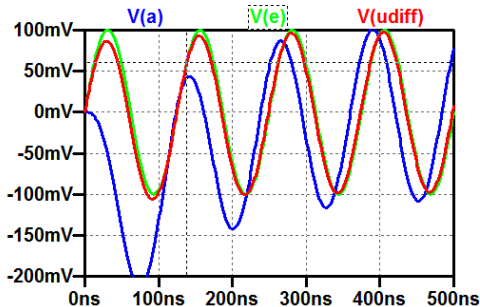
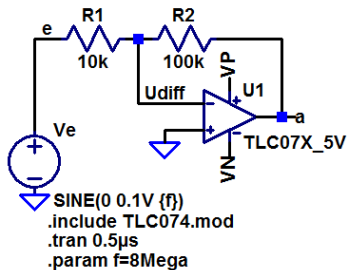


Sinussignale

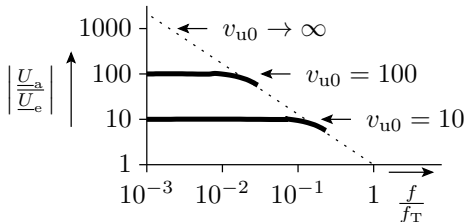
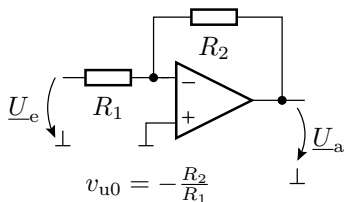
Sinussignale



Invertierender Verstärker mit Verstärkung $-R_2/R_1 = -10$ für niedrige Frequenzen. Im Bild bei 1 MHz ist die Verstärkung nur noch $-8,15$ und das Ausgangssignal gegenüber dem Eingabesignal um 120 ns verzögert. Bei einer Verringerung der Signalperiode auf die doppelte Verzögerung $T_P \approx 240$ ns müsste aus der Rückkopplung eine Mittkopplung werden?

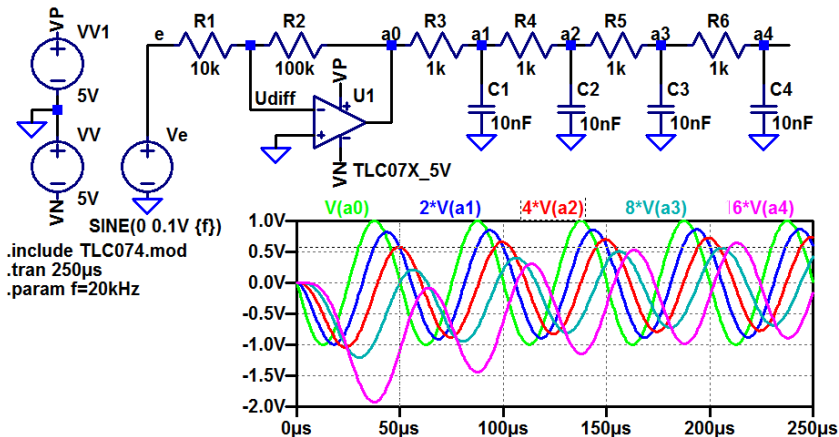


Bei 8 MHz sind Ein- und Ausgabesignal fast gleichphasig. Es kommt zu einer Mittkopplung. Die Verstärkung (Amplitude der Ausgangsspannung zur Amplitude der Differenzspannung) ist jedoch nur noch etwa eins. Wenn man R_2 weglässt, ändert sich die Ausgangsspannung kaum.



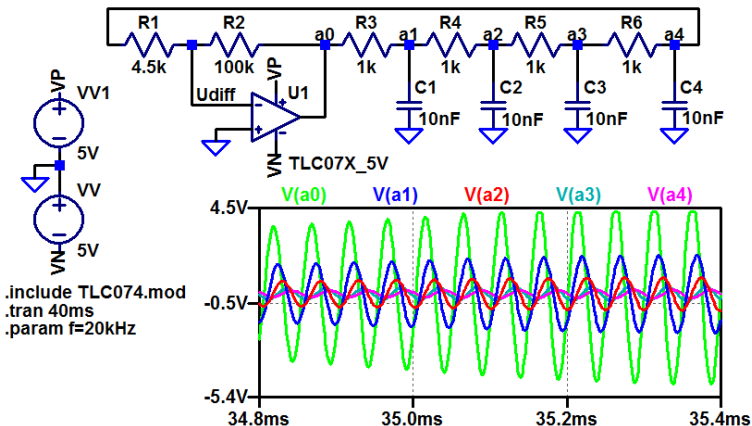
Die 8 MHz sind offenbar etwa die Transitfrequenz f_T des Operationsverstärkers, bei der die Verstärkung eins ist. Eine Verstärkung $v_{u0} > 1$ ist nur für die Spektralanteile mit $f < \frac{f_T}{v_{u0}}$ erreichbar. Rückgekoppelte Verstärker, bei denen die Verstärkung bei einer Phasenverschiebung von 180° größer eins ist, wandeln sich in mitgekoppelte Verstärker um und schwingen.

Verstärker mit RC-Phasenschieber am Ausgang



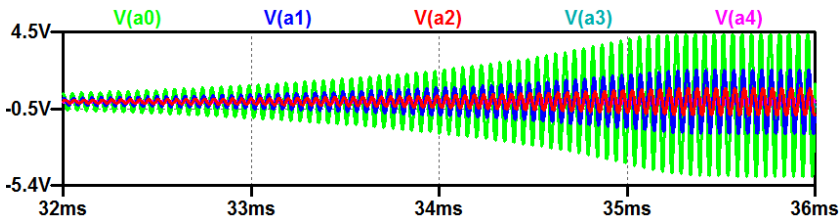
Jedes RC-Glied halbiert etwa das Ausgangssignal und verzögert es um $\approx 45^\circ$.

Bei Rückführung des Ausgangssignals a_4 auf den Verstärkereingang und einer Erhöhung der Verstärkung auf > 16 sollte die Schaltung schwingen. Bei Rückkopplung von a_4 auf den Eingang wird U_{a4} durch R_1 noch etwas mehr gedämpft. Erforderliche Verstärkung $R_2/R_1 \approx 22$.

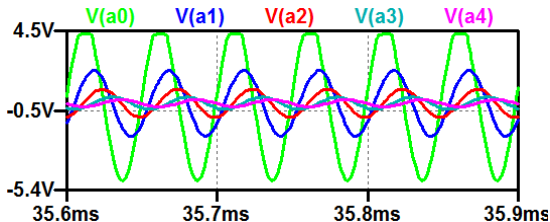




Genau genommen entsteht ein aufschwingendes Signal (Verstärkung mal Dämpfung > 1), das ab einer bestimmten Amplitude durch die Versorgungsspannung begrenzt wird.



Durch die Begrenzung wird das Sinussignal verzerrt. Ein guter Sinusgenerator regelt, wenn die gewünschte Amplitude erreicht ist, wenn die Verstärkung zurück.



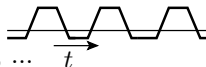


Testsignale

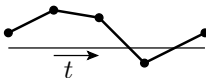
Programmierung der Signalquellen

Außer Rechteck und Sinus können die Spannungs- und Stromquellen des Simulators weitere Signalformen bereitstellen.

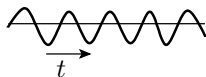
- periodische Pulse mit einstellbarer Einschalt-, Ausschalt-, Anstiegszeit, ...



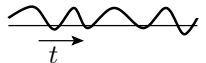
- stückweise lineare Verläufe mit Wert-Zeit-Punkten als Parameter



- Sinus mit einstellbarer Frequenz, Phasenverschiebung, Gleichanteil

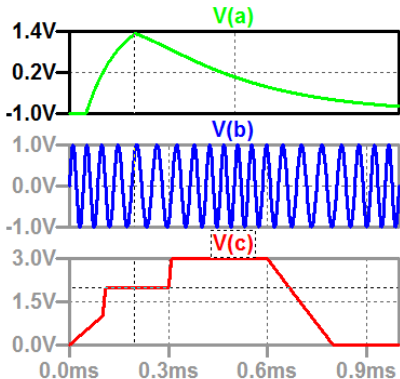
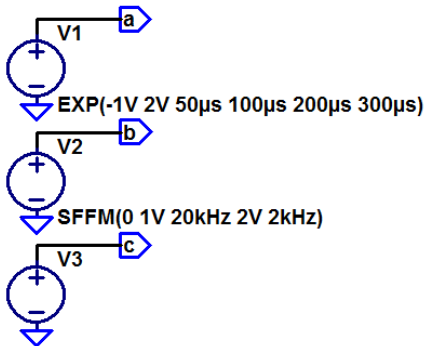


- Sinus mit zeitlich veränderlicher Frequenz, ... (frequenzmoduliert)



- Exponentialfunktion

.tran 1ms



PWL(0 0 0.1ms 1V 0.11ms 2V 0.3ms 2V 0.31ms 3V 0.6ms 3V 0.8ms 0V)



Frequenzbereich



Frequenzbereich

Im Frequenzbereich wird ein periodisches Zeitsignal durch eine Summe frequenzabhängiger komplexer Exponentialfunktionen dargestellt:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{X}_m \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Nach dem Überlagerungssatz ist bei einem linearen System die Systemantwort einer Summe von Eingangssignalen gleich der Summe der Systemantworten der Summanden und kann somit für jedes $\omega = m \cdot \omega_0$ einzeln berechnet werden.

Für jeden Summanden $\underline{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ bzw. $\underline{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ verhalten sich die komplexen Spannungen \underline{U} und Ströme \underline{I} auch an Kapazitäten und Induktivitäten zueinander proportional:

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = R \quad \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \underline{X}_L = j\omega L; \quad \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$



3. Frequenzbereich

Die Schaltungsanalyse im Frequenzbereich berechnet die frequenzabhängigen Amplituden und Phasen der komplexen Ströme und Spannungen als Funktion von der Frequenz.

Eine zeitdiskrete Simulation mit Kosinuseingabe berechnet Amplitude und Phase nur für eine Frequenz.

Gibt es imaginäre Ströme und Spannungen?

- In der Rechnung ja,
- in der Wirklichkeit nicht.

Ist das Widerspruch?

- Nein, ein physikalisch darstellbares Signal enthält zu jedem Spektralanteil den konjugiert komplexen Spektralanteil mit der negierten Frequenz. Gerechnet wird aber nur mit dem der positiven Frequenz.



Frequenzgang



Frequenzgang

Ein Frequenzgang ist das Verhältnis einer komplexen Ausgabe- zu einer komplexen Eingabegröße in Abhängigkeit von der (Kreis-) Frequenz ω eines linearen zeitinvarianten³ Systems.

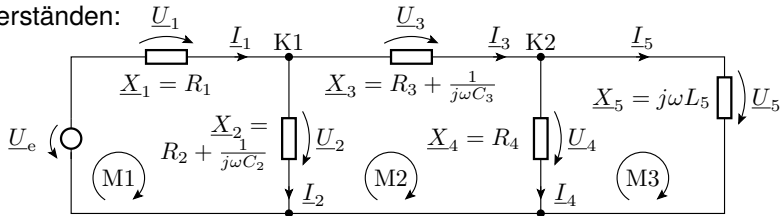
Amplitudenfrequenzgang: Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz.

Phasenfrequenzgang: Phasenverschiebung (gleich Produkt aus Verzögerung und Frequenz) in Abhängigkeit von der Frequenz.

³Zeitinvariant bedeutet, das sich das Systemverhalten nicht mit der Zeit ändert, d.h. dasselbe Eingangesignal zu einem anderen Zeitpunkt führt zeitversetzt zum selben Ausgangesignal.

Schaltungsanalyse im Frequenzbereich

Die Berechnung des Frequenzgangs erfolgt über Knoten- und Maschengleichungen mit den komplexen Strömen, Spannungen und Widerständen:



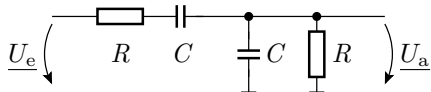
$$\begin{pmatrix}
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 R_1 & \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) & R_4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -R_4 & j\omega L_5
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die Auflösung des Gleichungssystems nach dem Verhältnis $\frac{U}{I}$ ist der Quotient aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom mit $j\omega$ als Argument:

$$\underline{X} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot j\omega + \dots + a_Z \cdot (j\omega)^Z}{b_0 + b_1 \cdot j\omega + \dots + b_N \cdot (j\omega)^N}$$

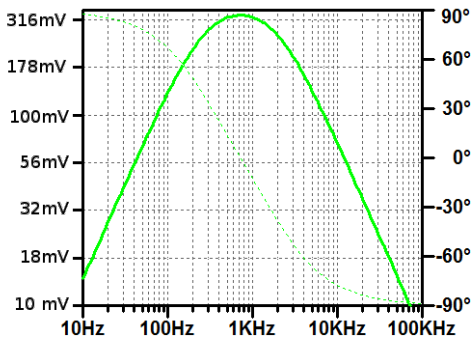
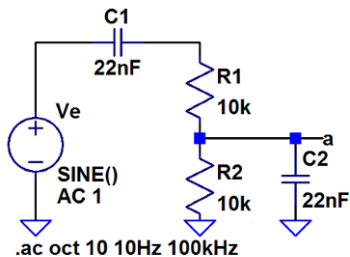
(Z – Grad des Zählerpolynoms; N – Grad des Nennerpolynoms).



$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{R \parallel \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \left(R \parallel \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1+j\omega RC}} \\ &= \frac{j\omega RC}{1 + 3 \cdot j\omega RC - (\omega RC)^2} \end{aligned}$$

Bode-Diagramm

Doppellogarithmische Darstellung des Amplitudenfrequenzgangs und einfachlogarithmische Darstellung des Phasenfrequenzgangs.



$$\underline{U}_a = \frac{j\omega RC \cdot 1V}{1 + 3 \cdot j\omega RC - (\omega RC)^2} \quad \text{mit} \quad R \cdot C = 22 \text{ nF} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 220 \mu\text{s}$$



Dezibel

Dezibel ist eine logarithmische Angabe für Amplitudenverhältnisse:

$$d = 20 \cdot \log_{10}(w); \quad w = 10^{\frac{d}{20}}$$

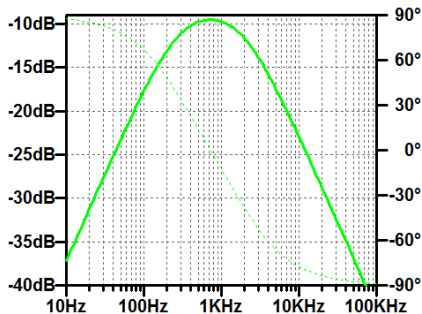
Wertangabe (w)	0,01	0,1	1	10	100
Dezibelangabe (d)	-40 dB	-20 dB	0 dB	20 dB	40 dB

Frequenzgangabschätzung

$$\underline{U}_a = \frac{j\omega RC \cdot 1 \text{ V}}{1 + 3 \cdot j\omega RC - (\omega RC)^2} \quad \text{mit} \quad R \cdot C = 22 \text{ nF} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 220 \mu\text{s}$$

$$= 1 \text{ V} \cdot \frac{\frac{j \cdot f}{723 \text{ Hz}}}{1 + \frac{j \cdot 3 \cdot f}{723 \text{ Hz}} - \left(\frac{f}{723 \text{ Hz}}\right)^2}$$

Bereich	Näherung $\frac{U_a}{1 \text{ V}}$
$f \ll 723 \text{ Hz}$	$\frac{\frac{j \cdot f}{723 \text{ Hz}}}{1}$
$f \approx 723 \text{ Hz}$	$\frac{\frac{j \cdot f}{723 \text{ Hz}}}{\frac{j \cdot 3 \cdot f}{723 \text{ Hz}}} = \frac{1}{3}$
$f \gg 723 \text{ Hz}$	$\frac{\frac{j \cdot f}{723 \text{ Hz}}}{-\left(\frac{f}{723 \text{ Hz}}\right)^2} = \frac{-j \cdot 723 \text{ Hz}}{f}$





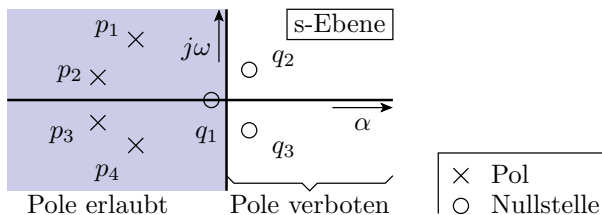
Laplace-Transformierte

Laplace-Transformierte, Pol-Nullstellen-Diagramm

Ersatz des Frequenzparameters $j\omega$ durch einen komplexen Frequenzparameter $s = \alpha + j\omega$. Laplace-Transformierte sind Quotienten zweier Polynome bezüglich s :

$$\underline{X} = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_Z \cdot s^Z}{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_N \cdot s^N} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{q_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{s}{q_Z}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{s}{p_N}\right)}$$

Bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig durch ihre Pole p_i und Nullstellen q_i beschreibbar.



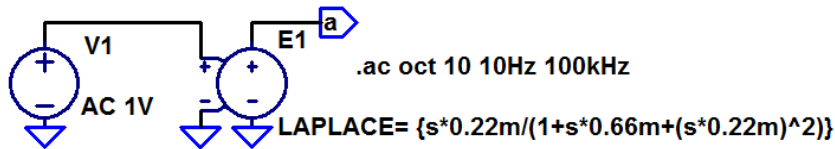


Aus den Abständen und Winkeln der Pole und Nullstellen zu einer Frequenz auf der Frequenzachse lassen sich Betrag und Phase abschätzen.

Konjugiert komplexe Pole in der rechten Halbebene zeigen Einschwingvorgänge und in der linken Halbebene abschwingende Vorgänge. Systeme mit Einschwingvorgängen sind instabil (schwingen von selbst). Signalverarbeitende Systeme dürfen nur Pole auf der linken Halbebene haben.

Der Frequenzgang gesteuerter Quellen kann direkt als Laplace-Transformierte einprogrammiert werden:

$$\underline{U}_a = \frac{j\omega \cdot 0,22 \text{ ms} \cdot 1 \text{ V}}{1 + j\omega \cdot 0,66 \text{ ms} + (j\omega \cdot 0,22 \text{ ms})^2} \Rightarrow \frac{s \cdot 0,22 \text{ ms} \cdot 1 \text{ V}}{1 + s \cdot 0,66 \text{ ms} + (s \cdot 0,22 \text{ ms})^2}$$

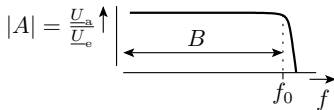
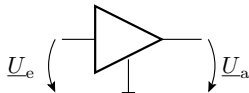




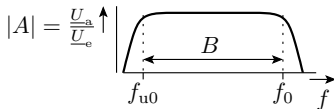
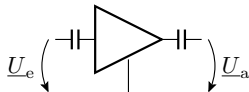
Verstärker

Frequenzgang von Verstärkern

Gleichspannungsverstärker



Wechselspannungsverstärker



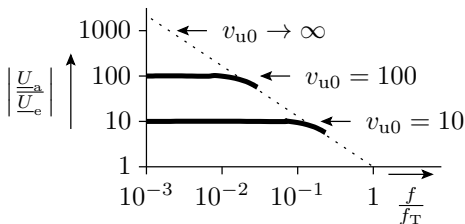
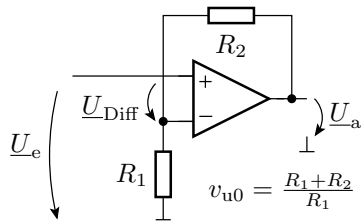
Ein Verstärker ohne induktive und kapazitive Beschaltung hat von $f = 0$ bis nahe an die Übergangsfrequenz f_0 eine betragsmäßig nahezu konstante Verstärkung $|A|$. Die Übergangsfrequenz ist die, bei der $|A|$ auf $1/\sqrt{2}$ abgefallen ist⁴ und gleichzeitig die Bandbreite B . Weitere Frequenzganganpassung / Bandbreitereduzierung durch externe L - und C -Beschaltung.

⁴Realteil gleich Imaginärteil.

Rückgekoppelter Operationsverstärker

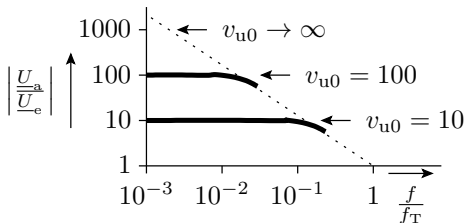
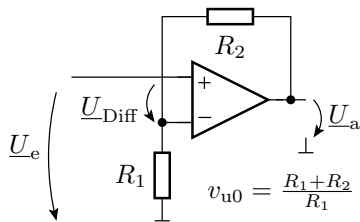
Frequenzgang ohne Rückkopplung:

$$\underline{v}_0 = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_{\text{Diff}}} \approx -j \cdot \frac{f_T}{f}$$



$$\underline{U}_a = \underline{v}_0 \cdot \left(\underline{U}_e - \frac{\underline{U}_a}{v_{u0}} \right) \quad \text{mit } v_{u0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}; \quad \underline{v}_0 \approx -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

(f_T – Transitfrequenz der Spannungsverstärkung; v_{u0} – Verstärkung für niedrige Frequenzen).

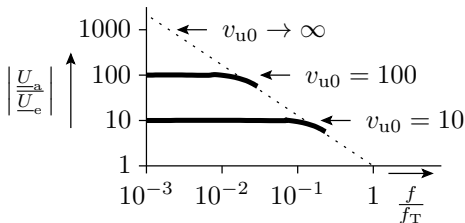
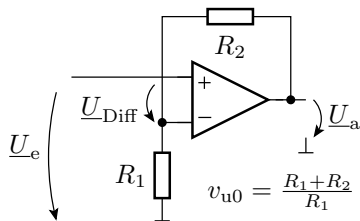


$$\underline{U}_a = \underline{v}_0 \cdot \left(\underline{U}_e - \frac{\underline{U}_a}{v_{u0}} \right) \quad \text{mit } v_{u0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}; \quad \underline{v}_0 \approx -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

$$\underline{U}_e = \underline{U}_a \cdot \left(\frac{1}{\underline{v}_0} + \frac{1}{v_{u0}} \right)$$

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{\frac{1}{\underline{v}_0} + \frac{1}{v_{u0}}} = \frac{v_{u0} \cdot \underline{U}_e}{\frac{v_{u0}}{\underline{v}_0} + 1} = \frac{v_{u0} \cdot \underline{U}_e}{\frac{j \cdot f \cdot v_{u0}}{f_T} + 1}$$

(f_T – Transitfrequenz der Spannungsverstärkung; v_{u0} – Verstärkung für niedrige Frequenzen).



$$\underline{U}_a = \frac{v_{u0} \cdot \underline{U}_e}{1 + j \cdot \frac{f}{f_{v0}}}$$

mit

$$v_{u0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}; \quad f_{v0} = \frac{f_T}{v_{u0}}$$

$(f_T$ – Transitfrequenz der Spannungsverstärkung; v_{u0} – Verstärkung für niedrige Frequenzen; $f_{v0} = \frac{f_T}{v_{u0}}$ – Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung).

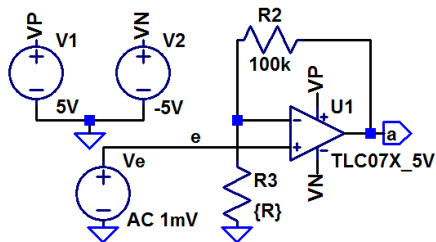


Rückkopplung mindert die Verstärkung und erhöht die Bandbreite B .
 Verstärkungs-Bandbreite-Produkt für Verstärker ohne L - und C -Beschaltung:

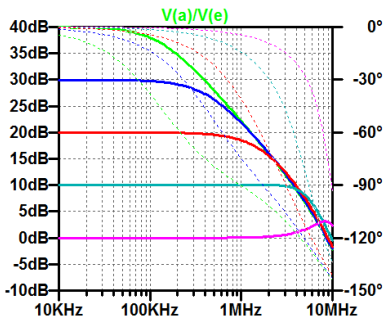
$$B \cdot v \approx f_T$$

(B – Bandbreite; v – Verstärkung; f_T – Transitfrequenz).

Beispielsimulation:



```
.include TLC074.mod
.ac oct 10 10kHz 1E7Hz
.step param R list 1.01k 3.27k 11.1k 46.2k 1E20k
```



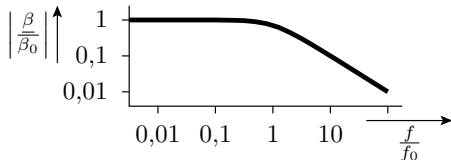
Frequenzgang von Transistorverstärkern

Frequenzgang der Stromverstärkung:

$$\underline{\beta} = \beta_0 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}}$$

β_0 – Grundverstärkung

f_0 – Übergangsfrequenz



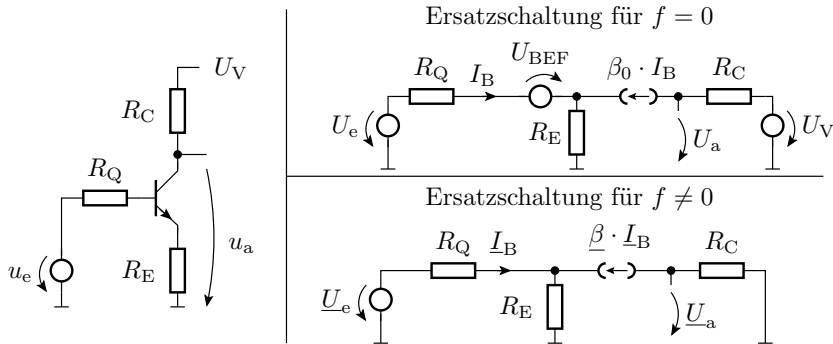
Für hohe Frequenzen $f \gg f_0$ gilt wie beim Operationsverstärker:

$$\underline{\beta} \approx \beta_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{f}{f_0}} = -j \cdot \frac{\beta_0 \cdot f_0}{f} = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

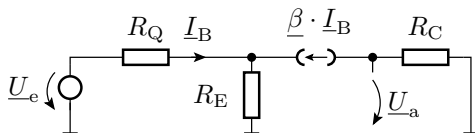
$f_T = \beta_0 \cdot f_0$ – Transitfrequenz, Frequenz für $\underline{\beta} = -j$.

Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung über R_E und einer Signalquelle mit Quellenwiderstand R_Q .



Aus der Ersatzschaltung für $f \neq 0$ berechnet sich der Frequenzgang.



$$\underline{U}_e = (R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})) \cdot \underline{I}_B$$

$$\underline{U}_a = -R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{I}_B$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{U}_e}{R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})}$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\underline{\beta}} + R_E}$$

Einsetzen des Frequenzgangs der Stromverstärkung:

$$\frac{1}{\underline{\beta}} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}$$

$$\underline{U}_a = - \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{(R_Q + R_E) \cdot \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T} \right) + R_E} = \frac{v_{V0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}} \quad (7.1)$$

Für niedrige Frequenzen beträgt die Verstärkung:

$$v_{V0} = - \frac{R_C}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E} \approx - \frac{R_C}{R_E}$$

Die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung f_{V0} (Realteil gleich Imaginärteil):

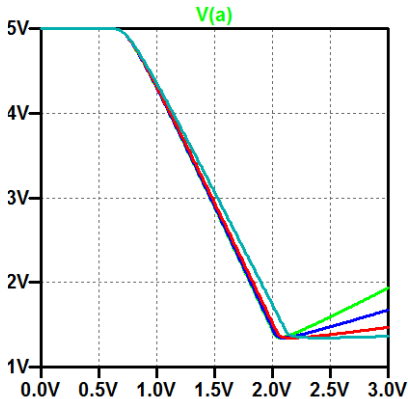
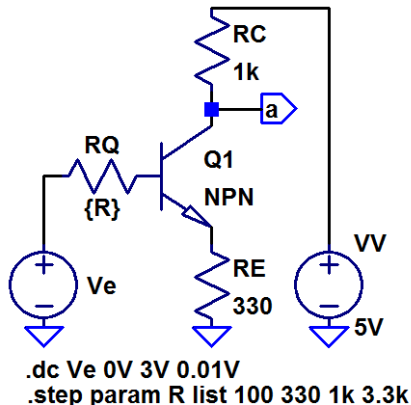
$$\begin{aligned} (R_Q + R_E) \cdot \frac{f_{V0}}{f_T} &= R_E + \frac{R_Q + R_E}{\beta_0} \\ f_{V0} &= f_T \cdot \frac{\frac{R_Q + R_E}{\beta_0} + R_E}{(R_Q + R_E)} \approx f_T \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E} \end{aligned}$$

Sonderfall kleiner Quellenwiderstand $R_Q \ll R_E$:

$$f_{V0} \approx f_T$$

Maximal Transitfrequenz der Stromverstärkung. Abnahme mit R_Q .

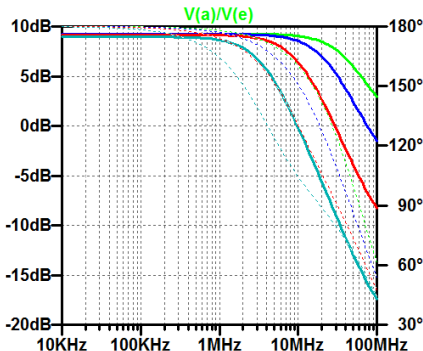
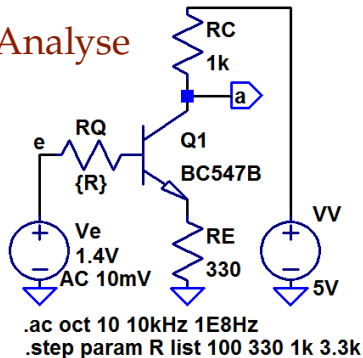
Simulation: DC-Analyse zur Arbeitspunktfestlegung



Für R_Q im gesamten variierten Bereich von 100Ω bis $3,3 \text{ k}\Omega$ ist $U_e = 1,4 \text{ V}$ ein guter Arbeitspunkt.



AC-Analyse

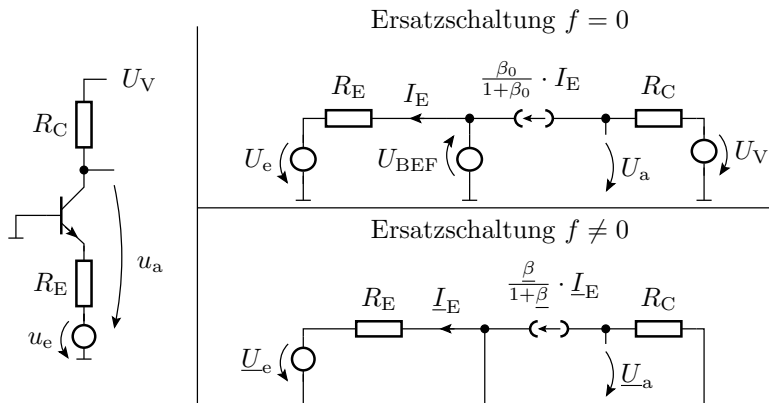


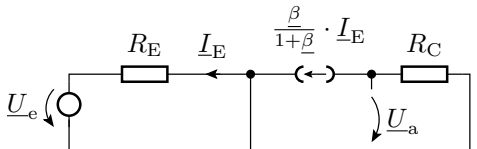
Die Verstärkung für niedrige Frequenzen ist wie vorhergesagt
 $-\frac{R_C}{R_E} = \frac{1\text{k}\Omega}{330\Omega} = 3 \approx 9,5\text{ dB}$. Erwartete Übergangsfrequenz (f_T –
 Transitfrequenz der Stromverstärkung):

R_Q	100 Ω	330 Ω	1 k Ω	3,3 k Ω
$f_{V0} \approx f_T \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E}$	$0,77 \cdot f_T$	$0,5 \cdot f_T$	$0,25 \cdot f_T$	$0,09 \cdot f_T$

Basisschaltung

Basis an Masse. Signaleinspeisung am Emitter. Die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung ist etwa die Transitfrequenz der Stromverstärkung:





$$\underline{I}_E = -\frac{\underline{U}_e}{R_E}$$

$$\underline{U}_a = -\frac{\underline{\beta} \cdot R_C \cdot \underline{I}_E}{1 + \underline{\beta}} = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\underline{\beta}}\right)}$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} \approx \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} = \frac{v_{V0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}}$$

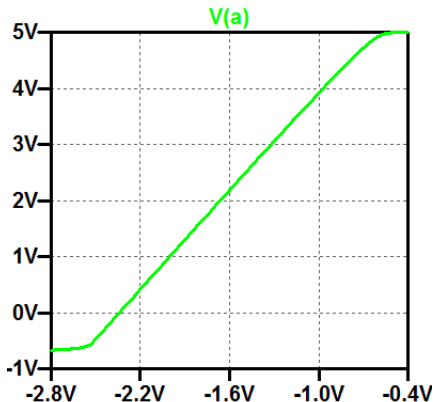
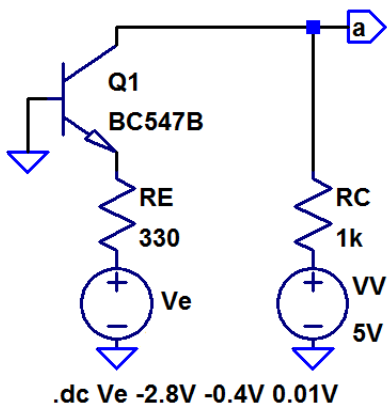
Die Verstärkung für niedrige Frequenzen:

$$v_{V0} \approx R_C / R_E$$

Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung:

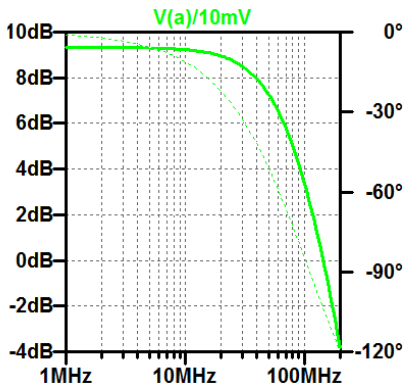
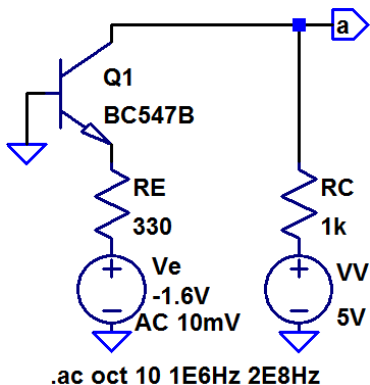
$$f_{V0} = \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right) \cdot f_T \approx f_T$$

DC-Analyse zur Arbeitspunktfestlegung



Ein guter Arbeitspunkt ist $U_e = -1,6 \text{ V}$.

AC-Analyse



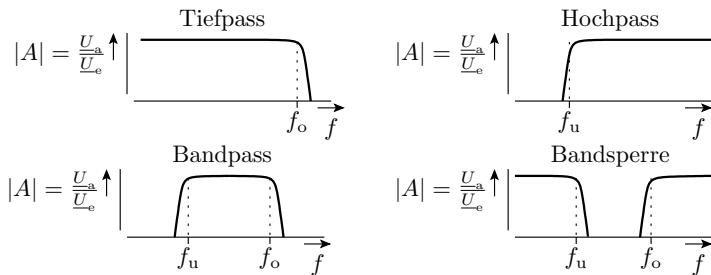
Der Betrag der Verstärkung ist wie bei der Emitterschaltung ca. 9 dB.
Die Übergangsfrequenz der Schaltung und die Transitfrequenz des Transistors liegt bei etwa 80...90 MHz.



Filter

Filter

Filter sind Schaltungen zur Einstellung eines gewissen Phasen- und Amplitudenfrequenzgangs. Wichtige Filterarten:



Tiefpässe dienen z.B. als Antialiasing-Filter⁵ vor der Abtastung, Bandpässe zur Sendertrennung beim Rundfunk- und Fernsehempfang. Entwurf im Laplace-Raum ($\gg s \ll$ statt $\gg j\omega \ll$).

⁵Beseitigung von Spektralanteilen größer der halben Abtastfrequenz.

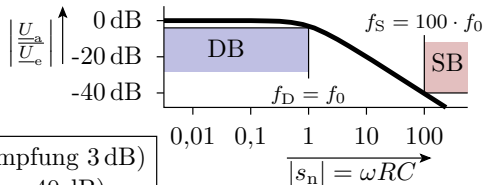
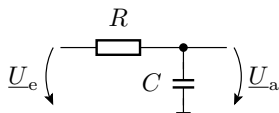
Entwurf von Tiefpässen

Ein Tiefpass hat im Laplace-Raum die Übertragungsfunktion:

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

(N – Filtergrad; a_0, a_i, b_i – Filterkoeffizienten; $s_n = \frac{s}{\omega_0}$ – normierte Frequenzvariable).

Der einfachste Tiefpass: RC-Glied mit $s_n = j\omega RC$.

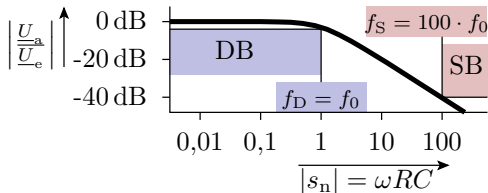


DB Durchlassband (max. Dämpfung 3 dB)

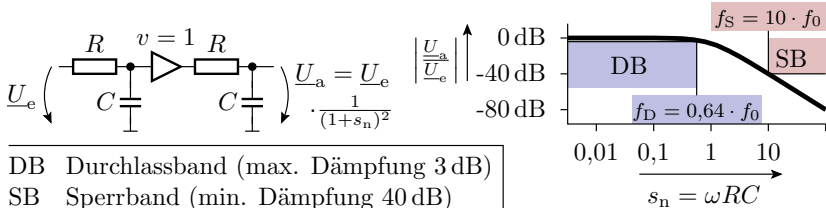
SB Sperrband (min. Dämpfung 40 dB)



$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \\ &= \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + s_n} \end{aligned}$$

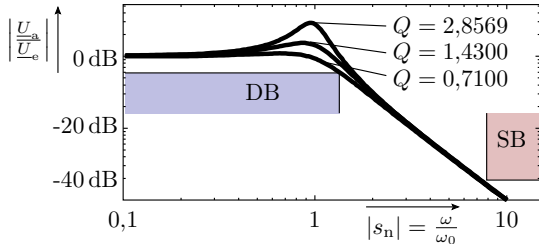
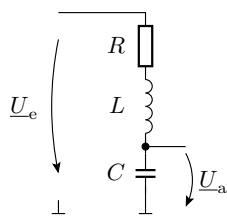


Bei geforderter Mindestdämpfung im Sperrband von 40 dB ist die Anfangsfrequenz des Sperrbands 100-mal so groß wie die obere Frequenz des Durchlassbands. Zur Digitalisierung müsste die Abtastfrequenz $200 \cdot f_0$ sein. Abstandsverringern durch Erhöhung der Filterordnung N . Verkettung von zwei RC-Gliedern.



Konjugiert komplexe Pole

Tiefpass 2. Ordnung mit konjugiert komplexen Polen:



$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + \frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + \frac{j \cdot \omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

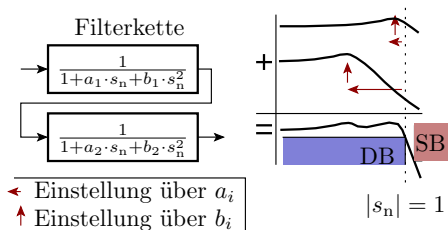
Laplace normiert:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + a \cdot s_n + b \cdot s_n^2} \quad \text{mit } a = \frac{1}{Q}; \quad b = 1; \quad s_n = \frac{j \cdot \omega}{\omega_0}$$

Pole:

$$p_{1/2} = -\frac{1}{2 \cdot Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot Q^2} - 1}$$

Verkettung von Filtern mit konjugiert komplexen Polen⁶:



⁶Verkettung bedeutet Addition der logarithmischen Beträge.

Standard-Tiefpassentwürfe

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

(N – Filtergrad; a_0 , a_i , b_i – Filterkoeffizienten; s_n – normierte Frequenzvariable). Für die Filterkoeffizienten a_0 , a_i , b_i gibt es Tabellen. Der Filtertyp (Potenz-, Tschebyscheff-, ...) beschreibt die Form des Übergangs vom Sperr- zum Durchlassband. Cauer-Filter haben den steilsten Übergang und die größte Verzerrung⁷. Besselfilter haben im Durchlassbereich eine nahezu konstante Verzögerung (Gruppenlaufzeit), d.h. sie verzerren kaum. Dafür ist für denselben Abstand zwischen Durchlass- und Sperrband ein höherer Filtergrad erforderlich.

⁷Frequenzabhängige Unterschiede der Dämpfung und Verzögerung im Durchlassbereich.

Bessel-Filter

Besselfilter haben konjugiert-komplexe Mehrfachpole:

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot (1+a \cdot s_n + b \cdot s_n^2)^{\frac{N-1}{2}}} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{(1+a \cdot s_n + b \cdot s_n^2)^{\frac{N}{2}}} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

Filtergrad ungerade

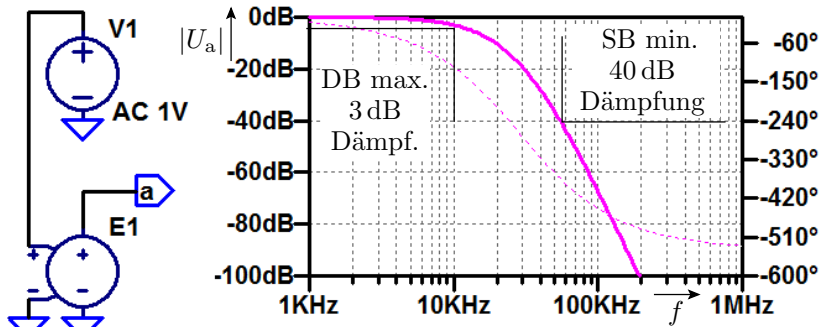
N	a_0	a	b
1	1,0000	-	-
3	0,5098	1,0197	0,2599
5	0,3856	0,7712	0,1487
7	0,3226	0,6453	0,1401
9	0,2829	0,5659	0,0801

Filtergrad grade

N	a	b
2	1,2872	0,4140
4	0,8700	0,1892
6	0,6999	0,1225
8	0,6017	0,0905
10	0,5358	0,0718

(N – Filtergrad; a_0, a_i, b_i – Filterkoeffizienten). Die verketteten Tiefpässe zweiter Ordnung sind identisch, d.h. im Gegensatz zu den anderen Filtertypen braucht man nur einen Tiefpass 2. Ordnung zu entwerfen und verkettet davon mehrere.

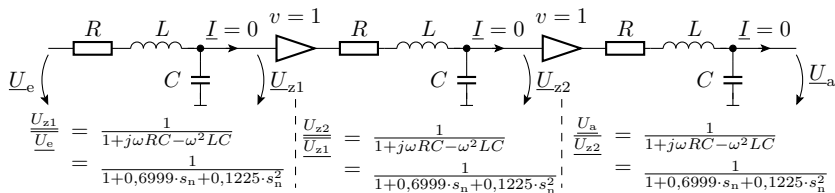
Simulation eines Besselfilters 6. Ordnung



```
LAPLACE=1/(1+0.6999*s/{om0}+0.1225*(s/om0)^2)^3
.ac oct 10 1kHz 100kHz .param om0=2*pi*10kHz
```

Das Durchlassband endet bei 10 kHz und das Sperrband fängt bei 50 kHz an.

Entwurf als RLC-Filter



Restliche Berechnung über Koeffizientenvergleich:

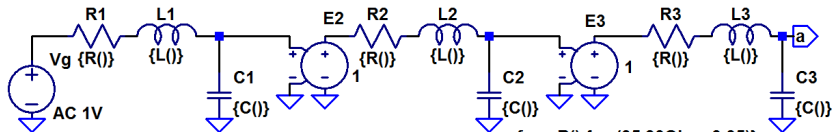
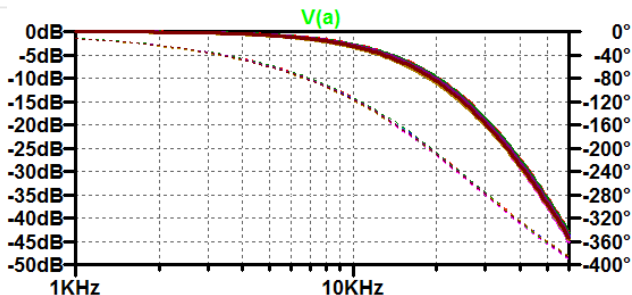
$$s_n = \frac{j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}}$$

$$0,1225 \cdot \left(\frac{j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \right)^2 = -\omega^2 LC \quad C = \frac{31,03 \mu\text{s}^2}{L}$$

$$\frac{0,6999 \cdot j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} = j\omega RC; \quad R = \frac{11,139 \mu\text{s}}{C}$$

Beispielwerte: $L = 100 \mu\text{H}$, $C = 310,30 \text{ nF}$ und $R = 35,90 \Omega$

Simulation

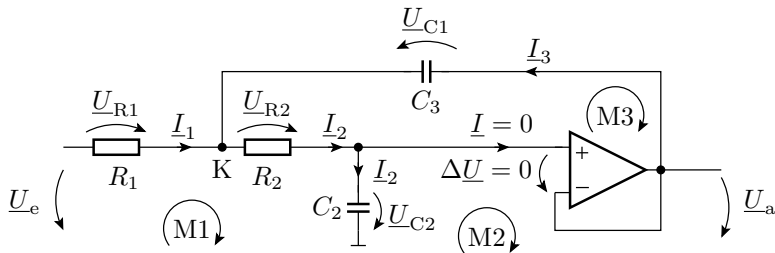


```
.step param run 1 100
.ac oct 10 1kHz 60kHz
```

```
.func R() {mc(35.90Ohm, 0.05)}
.func C() {mc(310.30nF, 0.05)}
.func L() {mc(100μH, 0.05)}
```

Die Funktionen $R()$, $C()$ und $L()$ erzeugen Zufallswerte im Bereich $\pm 5\%$ vom Nennwert. Die Step-Anweisung wiederholt die Simulation 100 mal.

Entwurf mit Operationsverstärkern



$$\begin{aligned}
 \text{K:} & \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\
 \text{M1:} & \quad R_1 \cdot I_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \right) \cdot I_2 = U_e \\
 \text{M2:} & \quad -\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \cdot I_2 + U_a = 0 \\
 \text{M3:} & \quad -R_2 \cdot I_2 - \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1} \cdot I_3 = 0
 \end{aligned}$$



Auflösen nach $\underline{U}_a = f(\underline{U}_e)$ durch eliminieren der 3 unbekanntenen Ströme:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2) - \omega^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2} = \frac{1}{1 + a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2}$$

Unter Vorgabe von C_1 und C_2 betragen die Widerstände:

$$R_{1/2} = \frac{a \cdot C_2 \mp \sqrt{a^2 \cdot C_2^2 - 4 \cdot b \cdot C_1 C_2}}{4\pi \cdot f_0 \cdot C_1 C_2}$$

Damit der Wert unter der Wurzel positiv ist:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4 \cdot b}{a^2} = \frac{4 \cdot 0,1225}{0,6999^2} = 1 \Rightarrow C_2 = C_1 = C$$

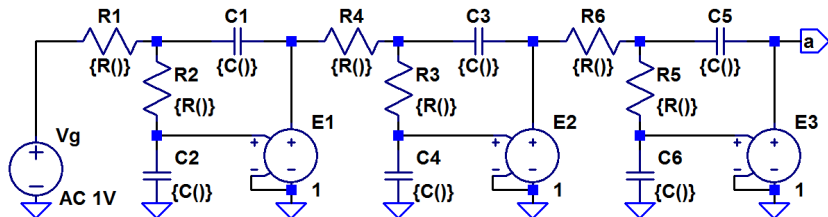
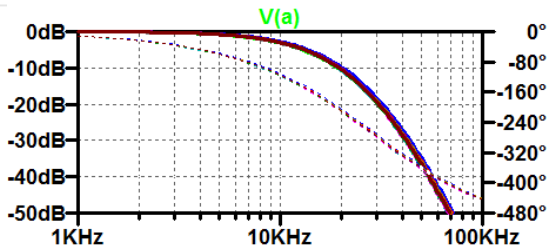
Mit den Bessel-Koeffizienten wird der Ausdruck unter der Wurzel genau für $C_2 = C_1 = C$ null. Damit werden auch beide Widerstände gleich:

$$R_1 = R_2 = \frac{a}{4 \cdot \pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot C} = \frac{0,6999}{4 \cdot \pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot C} = \frac{5,5696 \mu\text{s}}{C}$$

Beispielwerte: $C = C_1 = C_2 = 1 \text{ nF}$ und $R = R_1 = R_2 = 5,5696 \text{ k}\Omega$.



Simulation



```
.func R() {mc(5.57k, 0.05)}
.func C() {mc(1nF, 0.05)}
```

```
.step param run 1 100
.ac oct 10 1kHz 100kHz
```

Die rückgekoppelten Operationsverstärker sind durch gesteuerte Spannungsquellen mit Verstärkung eins ersetzt.

Hochpass und Bandpass

Tiefpass-Hochpass-Transformation: Ersatz $s_n \mapsto 1/s_n$. Als Beispiel unser Besselfilter 6. Ordnung:

$$A_{TP}(s_n) = \frac{1}{(1 + 0,6999 \cdot s_n + 0,1225 \cdot s_n^2)^3}$$

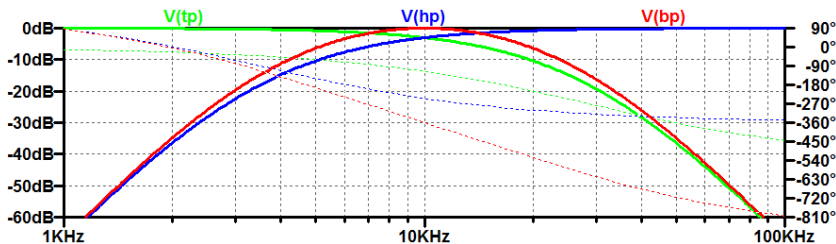
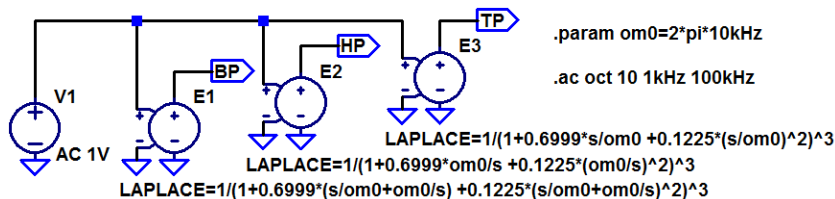
Korrespondierender Hochpass:

$$A_{HP}(s_n) = \frac{1}{\left(1 + 0,6999 \cdot \frac{1}{s_n} + 0,1225 \cdot \frac{1}{s_n^2}\right)^3}$$

Tiefpass-Bandpass-Transformation: Ersatz $s_n \mapsto \frac{1}{\Delta\omega_n} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right)$
($\Delta\omega_n$ – relative Breite des Durchlassbands. Als Beispiel unser Besselfilter 6. Ordnung mit einer relativen Bandbreite $\Delta\omega_n = 1$:

$$A_{BP}(s_n) = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,6999}{\Delta\omega_n} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right) + \frac{1,225}{\Delta\omega_n^2} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right)^2\right)^3}$$

Simulation von Tief-, Hoch- und Bandpass





Spektralanalyse



Das Spektrum eines Signals

Im Frequenzbereich wird ein periodisches Zeitsignal durch eine Summe zeitabhängiger komplexer Exponentialfunktionen dargestellt:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{X}_m \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

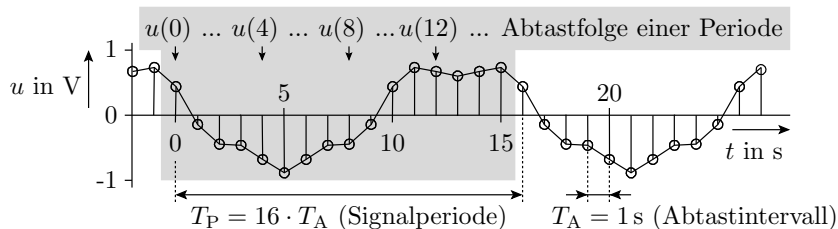
Die Spektralwerte $\underline{X}_m \neq 0$ bilden das Spektrum. Sie haben je eine Amplitude und eine Phase. Berechnung durch Fouriertransformation.

- Wiederholung Berechnung Spektrum.
- Weitere im Abschnitt untersuchte Fragestellungen: Die Ausgabe eines linearen Systems hat nur Spektralwerte $\neq 0$ für Frequenzen, die im Eingabespektrum enthalten sind. Wie ist das bei nichtlinearen Systemen?



Fouriertransformation

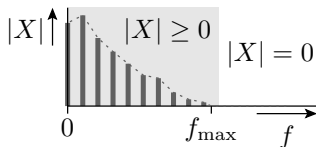
Fouriertransformation



Berechnung von N Spektralwerten aus N äquidistanten Abtastpunkten eines bandbegrenzten Signals. Abtasttheorem:

$$X_m = 0 \text{ für } |f_m| \geq f_{\max} = \frac{N}{2 \cdot T_P}$$

(T_P – Signalperiode).



f_{\max} Frequenz, ab der die Spektralwerte null sein müssen.



Die Spektralkwerte ergeben sich aus den Abtastwerten über ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}\left(-\frac{N}{2}\right) \\ \underline{X}\left(-\frac{N}{2} + 1\right) \\ \vdots \\ \underline{X}\left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

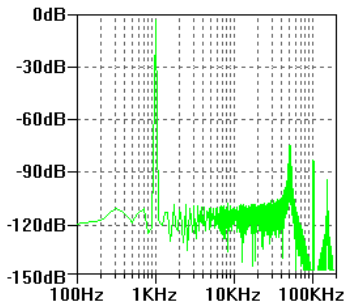
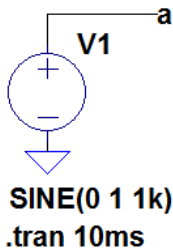
\mathbf{Q}^{-1} $-N \times N$ -Matrix mit den komplexen Koeffizienten:

$$q_{mn} = \frac{1}{N} \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

Praktische Berechnung mit der FFT (**F**ast **F**ourier **T**ransformation), die durch geschicktes Ausklammern nur $N \cdot \log(N)$ statt $N \cdot N$ komplexe Multiplikationen erfordert.

Spektrum aufgezeichneter Zeitfolgen mit LTSpice

Das Spektrum kann für jedes bei der Simulation aufgezeichnete Signal berechnet und angezeigt werden. Menü: »view«, »fft«, Signalauswahl, im Beispiel V(a):



Angezeigt wird der Betrag der Spektralwerte für positive Frequenzen.

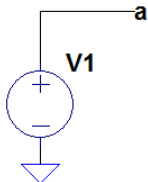


Das Beispielsignal

$$V(a) = 1 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot f}{1 \text{ kHz}}\right)$$

sollte nur für $|f| = 1 \text{ kHz}$ einen Spektralwert $\neq 0$ enthalten. Ursache weiterer Werte $\neq 0$ sind numerische Fehler, reduzierbar mit⁸:

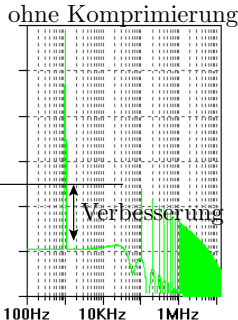
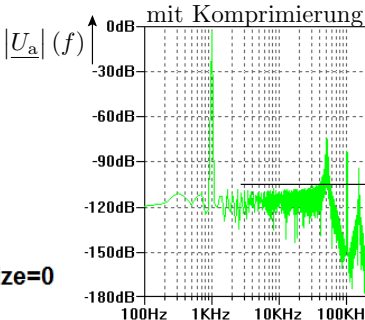
`.plotwinsize=0`



SINE(0 1 1k)

.option plotwinsize=0

.tran 10ms



⁸Deaktiviert die Datenkompression für aufgezeichnete Signalverläufe.

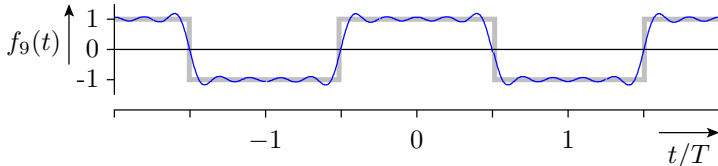
<http://www.audio-perfection.com/spice-ltspice/distortion-measurements-with-ltspice.html>

Spektrum eines Rechtecksignal

- Ein symmetrisches Rechtecksignal hat die Fourie-Reihe (vergl. Elektronik I, Foliensatz 7):

$$f_M(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^M \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right)}{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot m \cdot t}{T}\right)$$

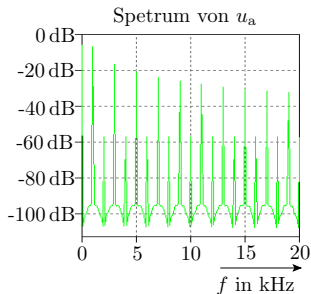
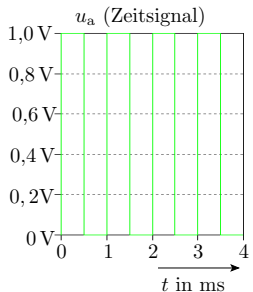
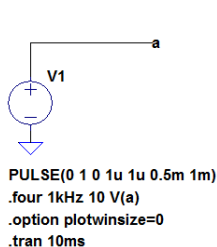
- Annäherung bis zur 9-fachen Frequenz:



$$f_9(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) - \frac{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 3 \cdot t}{T}\right)}{3} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 5 \cdot t}{T}\right)}{5} - \dots + \frac{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 9 \cdot t}{T}\right)}{9} \right)$$

Nur Spektralwerte ungeradzahligter Vielfacher der Grundfrequenz.

Bestimmung durch Simulation



- Theoretisch nur Spektralwerte für ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz (Oberwellen) von 1 kHz.
- Geringe Spektralwerte geradzahliger Oberwellen durch Differenz zwischen Ein- und Ausschaltzeit.
- Spektralwerte < -80 dB durch numerische Fehler.
- Zusätzlich Berechnung der Phase mit ».four 1kH 10 V(a)«.



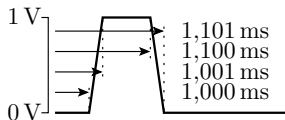
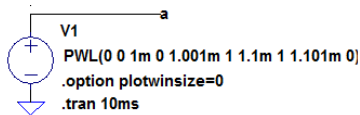
Mit der zusätzlichen Spice-Anweisung

```
.four 1kHz 10 V(a)
```

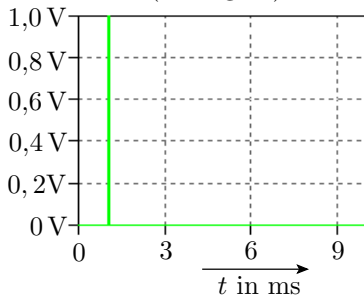
werden die Spektralwerte, im Beispiel für die 1kHz-Grundwelle und 9 Oberwellen (Vielfache der Grundfrequenz berechnet und im ErrLog-File incl. Phase dargestellt:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]
1	1.000e+03	6.366e-01	1.000e+00	-0.36°
2	2.000e+03	2.000e-03	3.142e-03	89.28°
3	3.000e+03	2.122e-01	3.333e-01	-1.08°
4	4.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	88.56°
5	5.000e+03	1.273e-01	2.000e-01	-1.80°
6	6.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.84°
7	7.000e+03	9.092e-02	1.428e-01	-2.52°
8	8.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.12°
9	9.000e+03	7.070e-02	1.111e-01	-3.24°
10	1.000e+04	1.999e-03	3.141e-03	86.40°

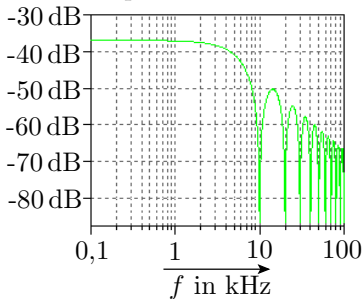
Das Spektrum eines periodischen Impulses



u_a (Zeitsignal)



Spektrum von u_a



Für $f < \frac{1}{2\pi \cdot t_{\text{Puls}}} = 1,6 \text{ kHz}$ (t_{Puls} – Pulsbreite) $|U_a| = \text{konst.}$

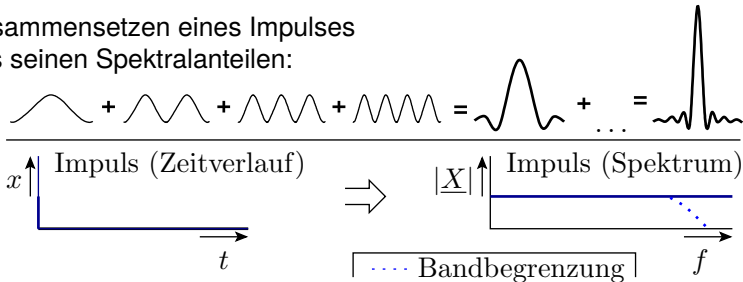
Spektren nicht periodischer Signale

Das Spektrum eines nicht periodischen Signals ergibt sich durch den Grenzwertübergang der Anzahl der Abtastpunkte je Periode $N \rightarrow \infty$.
 Beispiel Impuls. Erster Abtastwert $A \cdot N$, alle anderen null:

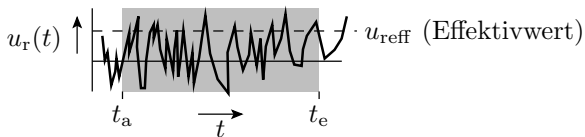
$$x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} A \cdot N & n = 0 \\ 0 & n = 1 \text{ bis } \infty \end{cases}$$

Spektralwerte aller Frequenzindizes: $\underline{X}(m) = A$.

Zusammensetzen eines Impulses
 aus seinen Spektralanteilen:



Die aufsummierten Kosinussignale für den Impuls haben alle dieselbe Amplitude und Phase null. Konstante Amplitude für alle Frequenzen hat auch ein ganz anderes Zeitsignal, das sog. weiße Rauschen, das sich aus vielen kleinen Impulsen zu zufälligen Zeitpunkten zusammensetzt (siehe später Folie 109).



Das Amplitudenspektrum allein reicht nicht für eine eindeutige Signalbeschreibung.

In der Praxis werden Spektren meist aus Abtastfolgen berechnet, die nicht genau eine Signalperiode lang sind, überlagert von einem Quantisierungsrauschen. Das sich dabei typisch ergebende Amplitudenspektrum besteht aus einem Grundrauschen und Peaks für die periodischen Anteile.

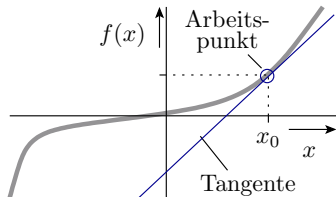


Klirrfaktor

Spektrum und Nichtlinearität

- Die Ausgabe eines linearen Systems hat nur Spektralwerte $\neq 0$ für Frequenzen, die im Eingabespektrum enthalten sind.
- Nichtlineare Systeme werden im Arbeitspunkt linearisiert durch Vernachlässigung der quadratischen, kubischen etc. Terme:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)}_{\text{lineare Näherung}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 + \dots}_{\text{vernachlässigte nichtlineare Anteile}}$$



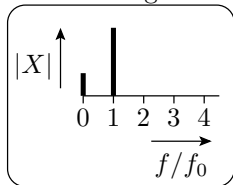
- 1 Was entsteht, wenn ein Kosinussignal mit n potenziert wird?

$$\cos(\omega t)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k) \cdot \omega \cdot t) \quad (7.2)$$

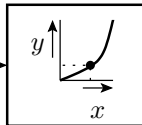
Spektralanteile mit der 2 bis n -fachen Frequenz.

- 2 Was entsteht aus einem Kosinussignal an einer nichtlinearen Kennlinie, bei der die Abweichung vom Arbeitspunkt entsprechend Taylor-Reihe linear + quadratisch + kubisch + ...einght?

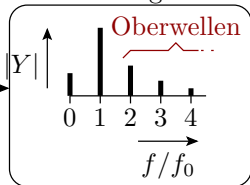
Amplitudenspektrum
der Eingabe



nichtlineares
System



Amplitudenspektrum
der Ausgabe



Spektralanteile für Summen- und Differenzfrequenzen.



Herleitung Gleichung 7.2:

$$\cos(\omega t)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k) \cdot \omega \cdot t)$$

$$\cos(\omega \cdot t)^n = \left(\frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot \omega \cdot t}) \right)^n$$

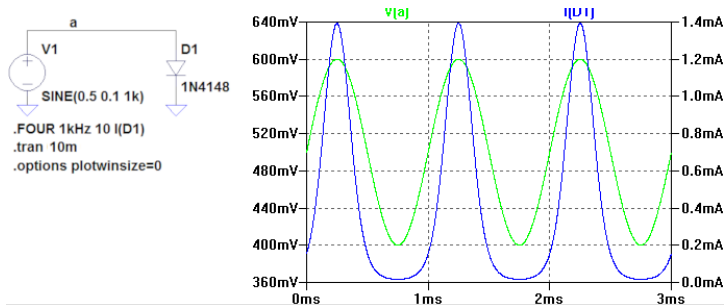
Nach dem Binomischen Lehrsatz:

$$(e^{j \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot \omega \cdot t})^n = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{e^{j \cdot \omega \cdot t \cdot (n-k)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t \cdot k}}_{e^{j \cdot \omega \cdot t \cdot (n-2k)}}$$

Summe enthält paarweise konjugiert komplexe Terme, z.B für $n = 4$:

k	0	1	2	3	4
Exponent: $n - 2k$	4	2	0	-2	-4
$\binom{n}{k}$	1	4	6	4	1

Signalverzerrung an einer Diode



- Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer Diode ist näherungsweise eine Exponentialfunktion.
- Der untere Teil des Ausgabesignals wird gestaucht und der obere gestreckt.



■ Spektralwerte des Diodenstroms berechnet mit:

```
.four 1kHz 10 I (D1)
```

Frequency [Hz]	Fourier Component	Phase [degree]	
1.000e+03	5.927e-04	0.01°	: Grundwelle
2.000e+03	2.740e-04	-89.99°	: 1. Oberwelle
3.000e+03	9.073e-05	-179.98°	: 2. Oberwelle
4.000e+03	2.303e-05	90.03°	: 3. Oberwelle
5.000e+03	4.649e-06	0.03°	: 4. Oberwelle
6.000e+03	7.509e-07	-89.96°	: 5. Oberwelle
7.000e+03	9.288e-08	-179.96°	: 6. Oberwelle
8.000e+03	6.882e-09	89.99°	: 7. Oberwelle
9.000e+03	4.010e-10	-178.20°	: 8. Oberwelle
1.000e+04	2.657e-10	90.08°	: 9. Oberwelle
Total Harmonic Distortion:			48.864496%

Klirrfaktor (Harmonic Distortion)

Der Klirrfaktor beschreibt Anteil der Energie der Oberwellen an der Gesamtenergie. Er berechnet sich als Verhältnis der Effektivwerte

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{m=2}^{\infty} |X_m|^2}{\sum_{m=1}^{\infty} |X_m|^2}}$$

(m – Frequenzindex) und ist ein Maß der Verzerrung. Bei Audiosignalen wird ein großer Klirrfaktor als »klirren« wahrgenommen.

Für den Diodenstrom im Beispiel gilt:

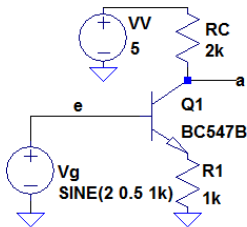
$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{(2,740 \cdot 10^{-4})^2 + (9,073 \cdot 10^{-5})^2 + \dots}{(5,927 \cdot 10^{-4})^2 + (2,740 \cdot 10^{-4})^2 + (9,073 \cdot 10^{-5})^2 + \dots}} \\ &= 48,8\% \end{aligned}$$

Das Ergebnis steht unter den Spektralwerten im SPICE Error Log:

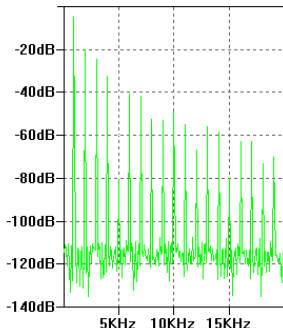
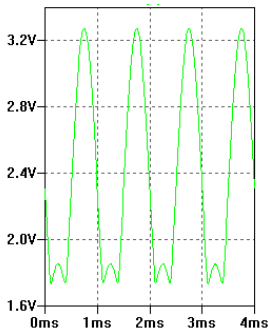
Total Harmonic Distortion: 48.864496%

Der Klirrfaktor eines Verstärkers

Wenn das Eingangssignal eines Verstärkers zu groß ist, übersteuert er, d.h. er verlässt seinen linearen Kennlinienbereich:



```
.option plotwinsize=0
.four 1kHz 10 V(a)
.tran 10m
```



Das Eingangssignal ist $U_g = 2\text{ V} + 0,5\text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{ kHz} \cdot t)$. Für zu große Werte der Eingangsspannung geht der Transistor in die Übersteuerung. Die Verstärkung wechselt von -2 nach 1.



Fourier-Koeffizienten und Klirrfaktor aus dem SPICE Error Log:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]
1	1.000e+03	7.883e-01	1.000e+00	-180.00°
2	2.000e+03	1.396e-01	1.770e-01	-90.04°
3	3.000e+03	8.518e-02	1.081e-01	179.96°
4	4.000e+03	3.380e-02	4.287e-02	90.03°
5	5.000e+03	1.275e-04	1.618e-04	44.24°
6	6.000e+03	1.318e-02	1.671e-02	89.62°
7	7.000e+03	1.124e-02	1.426e-02	-0.06°
8	8.000e+03	3.207e-03	4.068e-03	-88.60°
9	9.000e+03	3.201e-03	4.060e-03	-1.90°
10	1.000e+04	4.716e-03	5.983e-03	-90.54°

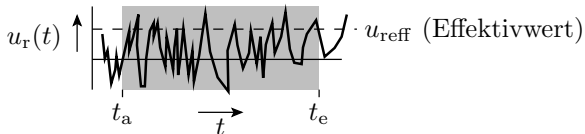
Total Harmonic Distortion: 21.307795%



Rauschen

Rauschen

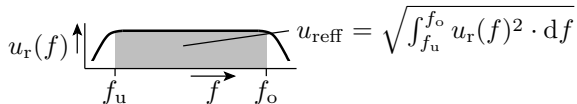
Jede Spannung und jeder Strom ist mit einem Rauschsignal überlagert:



Rauschsignale werden durch ihren Effektivwert (Leistungsmittelwert),
Abschätzung für das Zeitfenster $[t_a, t_e]$

$$u_{\text{reff}} = \sqrt{\frac{1}{t_e - t_a} \cdot \int_{t_a}^{t_e} u_r^2(t) \cdot dt}$$

und seine spektrale Rauschdichte beschrieben:





SNR und Simulationsart »noise«

Nutzsignale sind nur auswertbar, wenn sie vom Rauschen unterscheidbar sind. Maß für die »Trennbarkeit« ist der Signal-Rausch-Abstand SNR (Signal-Noise-Ratio) als Verhältnis des Leistungsumsatzes von Nutz- und Rauschsignal an einem Widerstand und gleich dem Verhältnis der Effektivwertquadrate:

$$SNR = \frac{U_{\text{eff}}^2}{u_{\text{reff}}^2}$$

LT-Spice berechnet in der Simulationsart »noise« äquivalente Rauschdichten für auf den Schaltungsausgang transformiertes:

- Wärmerauschen an Widerständen,
- Stromrauschen (Schottrauschen) an pn-Übergängen,
- gesamte äquivalente Rauschdichte am Ausgang,
- frequenzabhängige Verstärkung (gain) und
- gesamte äquivalente Eingangsrauschdichte (Ausgangsrauschdichte durch »gain«).

Daraus lassen sich unter Angabe des Frequenzbereichs die Effektivwerte des Rauschens und damit die Signal-Rausch-Abstände bestimmen.



Wärmerauschen



Wärmerauschen an Widerständen

Driftende Leitungselektronen erzeugen mit großer Rate statistisch unabhängige Spannungs- und Stromimpulse kurzer Dauer, deren Überlagerung zu einem Spektrum mit frequenzunabhängiger konstanter Amplitude und zufälliger Phase führt (weißes Rauschen):

$$\begin{aligned} \text{Rauschspannungsdichte: } u_{r.R}(f) &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R} \\ \text{Effektivwert}^{(*)}: u_{\text{reff.R}} &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R \cdot \Delta f} \\ \text{Rauschstromdichte: } i_{r.R}(f) &= \frac{u_{r.R}(f)}{R} = \sqrt{\frac{4 \cdot k_B \cdot T}{R}} \\ \text{Effektivwert}^{(*)}: i_{\text{reff.R}} &= \frac{i_{\text{reff.R}}(f)}{R} = \sqrt{\frac{4 \cdot k_B \cdot T \cdot \Delta f}{R}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

($k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}}$ – Boltzmannkonstante; T – Temperatur in Kelvin;

(*) – bei frequenzunabhängiger Rauschdichte; Δf – genutzte Bandbreite). Die effektive Rauschleistung beträgt unabhängig vom Widerstandswert:

$$P_{\text{reff.R}} = u_{\text{reff.R}} \cdot i_{\text{reff.R}} = 4 \cdot k_B \cdot T \cdot \Delta f$$

Beispiel zum Wärmerauschen an einem Widerstand

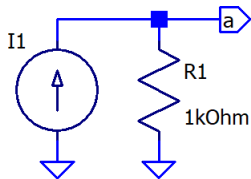
$$T = 300 \text{ K}; R = 1 \text{ k}\Omega; \Delta f = 1 \text{ MHz:}$$

$$u_{\text{reff.R}} = \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \cdot 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ MHz}} = 4,07 \mu\text{V}$$

$$i_{\text{reff.R}} = \frac{u_{\text{reff.R}}}{R} = 4,07 \text{ nA}$$

$$P_{\text{reff.R}} = u_{\text{reff.R}} \cdot i_{\text{reff.R}} = 16,6 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

Kontrolle durch Simulation:

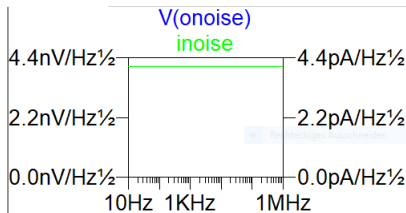


```
.noise V(a) I1 oct 10 10 1E6
```

```
.meas noise nr1 integ V(r1)
```

```
.meas noise no integ V(onoise)
```

```
.meas noise ni integ inoise
```



```
nr1: INTEG(v(r1))=4.07135e-06 FROM 10 TO 1e+06
```

```
no: INTEG(v(onoise))=4.07e-06 FROM 10 TO 1e+06
```

```
ni: INTEG(inoise)=4.07135e-09 FROM 10 TO 1e+06
```

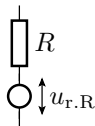


Rauschquellen

Rauschquellen

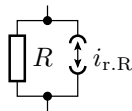
Rauschen wird durch ungerichtete Spannungs- oder Stromquellen mit ihrer Rauschdichte modelliert, die auch frequenzabhängig sein kann:

Widerstand mit
Rauschspannungsquelle



$$u_{r,R}(f) = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R}$$

Widerstand mit
Rauschstromquelle

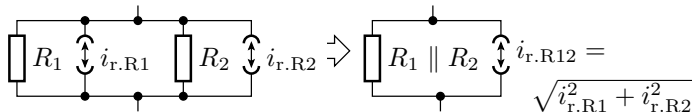
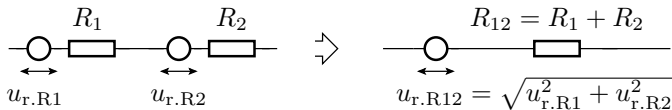


$$i_{r,R}(f) = \sqrt{\frac{4 \cdot k_B \cdot T}{R}}$$

Die Rauschdichten der einzelnen Quellen werden in äquivalente Rauschdichten am Schaltungsein- oder Ausgang umgerechnet und zusammengefasst.

Zusammenfassen von Rauschquellen

Addition unkorrelierter Rauschanteile (Rauschdichten, Effektivwerte) nach Pythagoras:

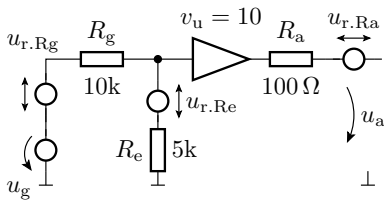


Wärmerauschdichte von zwei Widerständen in Reihe:

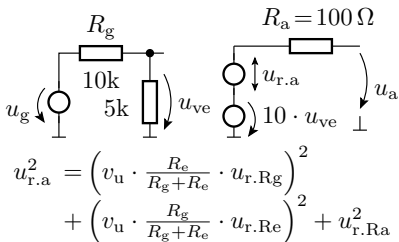
$$\begin{aligned}
 \sqrt{u_{r,R1}^2(f) + u_{r,R2}^2(f)} &= \sqrt{\sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_1}^2 + \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_2}^2} \\
 &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot (R_1 + R_2)}
 \end{aligned}$$

Rauschquellentransformation

Schaltung mit 3 Rauschquellen



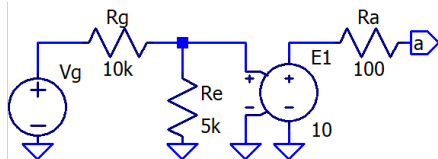
äquivalentes Ausgangsrauschen



Für $T = 300 \text{ K}$ und $\Delta f = 1 \text{ MHz}$:

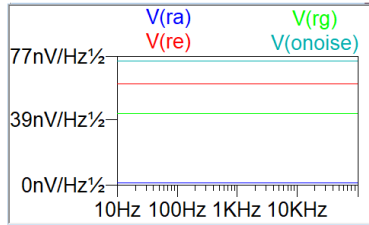
effektive Rauschspannung	auf Ausgang transformiert
$u_{\text{reff.rg}} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_g \cdot \Delta f} = 12,9 \mu\text{V}$	$nrg = \frac{10 \cdot 5}{15} \cdot u_{\text{reff.rg}} = 42,9 \mu\text{V}$
$u_{\text{reff.re}} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_e \cdot \Delta f} = 9,10 \mu\text{V}$	$nre = \frac{10 \cdot 10}{15} \cdot u_{\text{reff.re}} = 60,7 \mu\text{V}$
$u_{\text{reff.ra}} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_a \cdot \Delta f} = 1,29 \mu\text{V}$	$nra = u_{\text{reff.ra}} = 1,29 \mu\text{V}$
$u_{\text{reff.a}} = \sqrt{nrg^2 + nre^2 + nra^2} = 74,3 \mu\text{V}$	$u_{\text{reff.in}} = \frac{u_{\text{reff.a}}}{\frac{R_e}{v_u \cdot \frac{R_g + R_e}{R_e}}} = 22,3 \mu\text{V}$

Kontrolle mit dem Simulator



```
.noise V(a) Vg oct 10 10 1E6
.meas noise nrg integ V(Rg)
.meas noise nre integ V(Re)
.meas noise nra integ V(Ra)
.meas noise u_reff_a integ V(onoise)
.meas noise u_reff_in integ V(inoise)
```

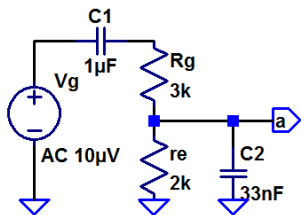
```
nrg: INTEG(v(rg))=4.29158e-05 FROM 10 TO 1e+06
nre: INTEG(v(re))=6.06922e-05 FROM 10 TO 1e+06
nra: INTEG(v(ra))=1.28748e-06 FROM 10 TO 1e+06
u_reff_a: INTEG(v(onoise))=7.43e-05 FROM 10 TO 1e+06
u_reff_in: INTEG(v(inoise))=2.23e-05 FROM 10 TO 1e+06
```



Der Signalrauschabstand für $U_{\text{eff.g}} = 100 \mu\text{V}$:

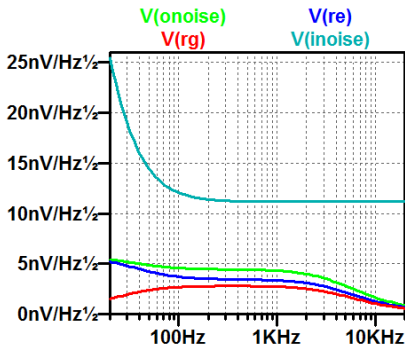
$$SNR = \left(\frac{U_{\text{eff.g}}}{V(\text{inoise})} \right)^2 = \left(\frac{100 \mu\text{V}}{22,3 \mu\text{V}} \right)^2 = 22,3$$

Frequenzabhängige Übertragungsfunktion



```

.meas noise noise_Rg integ V(Rg)
.meas noise noise_re integ V(re)
.meas noise noise_e integ V(onoise)
.meas noise noise_g integ V(inoise)
.noise V(a) Vg oct 10 20Hz 20kHz
    
```



Bei einer frequenzabhängigen Übertragungsfunktion sind auch die Verstärkungen und Dämpfungen der Rauschteile frequenzabhängig. Die äquivalente Eingangsrauschdichte ist unterhalb des genutzten Frequenzbereichs deshalb so groß, weil dort die Verstärkung, durch die dividiert wird, klein ist.



ohne Kapazitäten:

```
noise_rg: INTEG(v(rg))=3.987e-007 FROM 20 TO 2e4  
noise_re: INTEG(v(re))=4.883e-007 FROM 20 TO 2e4  
noise_e: INTEG(v(onoise))=6.304e-007 FROM 20 ...  
noise_g: INTEG(v(inoise))=1.576e-007 FROM 20 ...
```

mit Kapazitäten:

```
noise_rg: INTEG(v(rg))=2.079e-007 FROM 20 TO 2e4  
noise_re: INTEG(v(re))=2.567e-007 FROM 20 TO 2e4  
noise_e: INTEG(v(onoise))=3.303e-007 FROM 20 ...  
noise_g: INTEG(v(inoise))=1.579e-006 FROM 20 ...
```

Die Dämpfung für niedrige und hohe Frequenzen reduziert das Rauschen etwas.



Stromrauschen

Stromrauschen an pn-Übergängen

Stromschwankungen kleinster Ströme durch die diskrete Natur der Ladungsträgerbewegung. Kann als Prasseln der Elektronen verstanden werden, die Spannungsschwellen passieren (etwa wie Steine, die einen Berghang herunterfallen). **Temperaturunabhängig!** Spice berücksichtigt

- einen frequenzunabhängigen Anteil (Schrotrauschen):

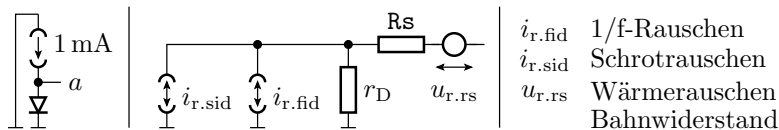
$$\begin{aligned} \text{Rauschdichte: } i_{r.\text{sid}}(f) &= \sqrt{2 \cdot q \cdot I} \\ \text{Effektivwert: } i_{\text{reff. sid}} &= \sqrt{2 \cdot q \cdot I \cdot \Delta f} \end{aligned}$$

- $1/f$ -Rauschen (Funkelrauschen):

$$\begin{aligned} \text{Rauschdichte: } i_{r.\text{fid}}(f) &= \sqrt{\frac{k_F \cdot I^{A_F}}{f}} \\ \text{Effektivwert: } i_{\text{reff. fid}} &= \sqrt{k_F \cdot I^{A_F} \cdot \ln\left(\frac{f_o}{f_u}\right)} \end{aligned}$$

($q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}$ – Elementarladung; I – Dioden-, Basis- oder Kollektorstrom (Gleichanteil); Δf – Bandbreite; k_F – Funkelrauschkoeffizient, Spice-Parameter Kf); A_F – Funkelrauschexponent, typ. 1...2, Spice-Parameter Af).

Untersuchung der Rauschanteile einer Diode:



$I = 1 \text{ mA}$, $f_u = 10 \text{ Hz}$; $f_o = 10 \text{ MHz} \approx \Delta f$, $R_s = 0,568 \Omega$; $r_D = \frac{dU_D}{dI_D}$ für $I_D = 1 \text{ mA}$ laut Simulation 46Ω ; $A_f = 1,2$; $K_f = 10^{-15} \text{ A}^{0,2}$:

$$i_{r.sid} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ mA}} = 17,9 \frac{\text{pA}}{\sqrt{\text{Hz}}}$$

$$u_{r.sid} = i_{r.sid} \cdot r_D = 817 \frac{\text{pV}}{\sqrt{\text{Hz}}}$$

$$* \quad u_{\text{reff.sid}} = u_{r.sid} \cdot \sqrt{10 \text{ MHz}} = 2,60 \mu\text{V}$$

$$* \quad u_{\text{reff.rs}} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot 300 \text{ K} \cdot R_s \cdot 10 \text{ MHz}} = 307 \text{ nV}$$

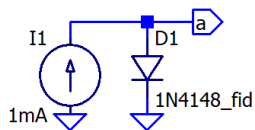
$$i_{r.fid}(f) = \sqrt{\frac{10^{-15} \text{ A}^{0,8} \cdot (1 \text{ mA})^{1,2}}{f}} = \sqrt{\frac{251 \cdot 10^{-19} \text{ A}^2}{f}}$$

$$i_{\text{reff.fid}} = \sqrt{10^{-15} \text{ A}^{0,8} \cdot (1 \text{ mA})^{1,2} \cdot \ln\left(\frac{10 \text{ MHz}}{10 \text{ Hz}}\right)} = 2,08 \text{ nA}$$

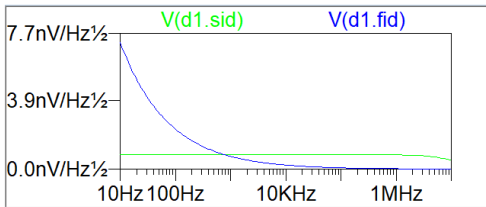
$$* \quad u_{\text{reff.fid}} = i_{\text{reff.fid}} \cdot r_D = 85,7 \text{ nV}$$

* Rauschanteile der Ausgangsspannung, die mit Simulationsart »noise« berechnet werden.

Kontrolle der Abschätzungen durch Simulation:



```
.noise V(a) I1 oct 10 10 10E6
.meas noise d1_fid integ V(d1.fid)
.meas noise d1_rs integ V(d1.rs)
.meas noise d1_sid integ V(d1.sid)
.model 1N4148_fid ako: 1N4148
      af=1.2, KF = 1E-15
```



```
d1_fid: INTEG(v(d1.fid))=8.29582e-08 FROM 10 TO 1e+07
d1_rs: INTEG(v(d1.rs))=3.06842e-07 FROM 10 TO 1e+07
d1_sid: INTEG(v(d1.sid))=2.16292e-06 FROM 10 TO 1e+07
```

Anmerkungen:

- Im Modell für die Diode 1N4148 ist kein $1/f$ -Rauschen berücksichtigt. Die hinzugefügten Parameterwerte für K_f , A_f wurden willkürlich gewählt.
- Der Bahnwiderstand auf der Folie zuvor $R_S = 0,568 \Omega$ steht im Spice-Modell. $r_D = 46 \Omega$ wurde mit TF-Simulation bestimmt.
- Abweichung zwischen $u_{\text{reff.sid}}$ und $d1_sid$ sowie $u_{\text{reff.rs}}$ und $d1_rs$ resultieren aus dem Absinken von $V(d1_sid)$ ab $\approx 2 \text{ MHz}$.



Anmerkungen zum 1/f-Rauschen

Das 1/f-Rauschen hat die unterschiedlichsten Ursachen:

- Diffusion von Atomen und Molekülen an Grenz- und Oberflächen,
- Schwankungen der Gate-Ladungen bei MOSFETs,

Richtwert für die Frequenz, bis zu der das 1/f Rauschen größer als das Stromrauschen ist⁹:

- Röhren: ≈ 10 kHz
- Bipolartransistoren: ≈ 1 kHz
- Sperrschicht-FETs ≈ 100 Hz
- MOSFETS ≈ 10 MHz

Der Effektivwertanteil unterhalb des betrachteten Frequenzbereichs

$$\sqrt{k_F \cdot I_D^{AF} \cdot \ln \left(\frac{f_u}{f_{u'}} \right)}$$

($f_{u'}$ – sich aus der Lebensdauer ergebende untere Grenzfrequenz, Größenordnung 1/Jahre) ist die Parameterdrift.

⁹Weiterführende Literatur: Rudolph Müller: Rauschen. Springer. 1990.



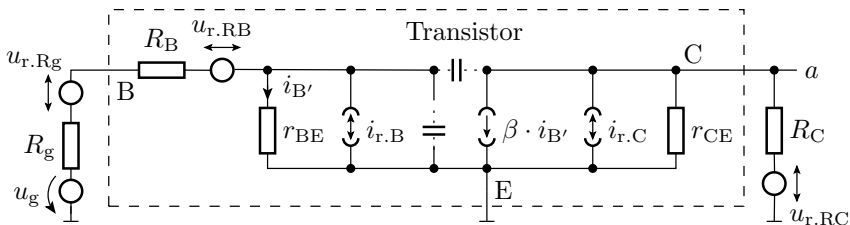
Bipolartransistoren

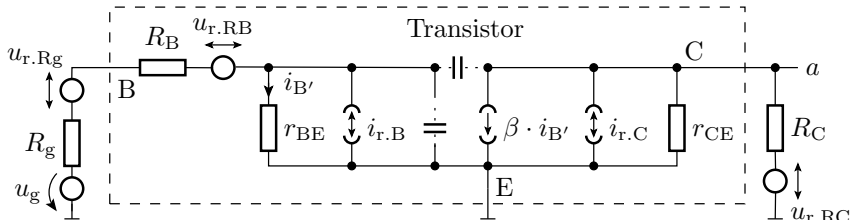
Rauschen von Bipolartransistoren

LTSpice berechnet für Bipolartransist. äquivalente Rauschanteile für

- Stromrauschen Basisstrom
 - frequenzunabhängiger Anteil: .sib
 - 1/f-Anteil: .fib
- Stromrauschen Kollektorstrom: .sic
- Wärmerauschen Bahnwiderstände: .rb, .rc, .re
- und das äquivalente Gesamtrauschen des Transistors

jeweils transformiert auf den Schaltungsausgang.





Kleinsignalverhalten:

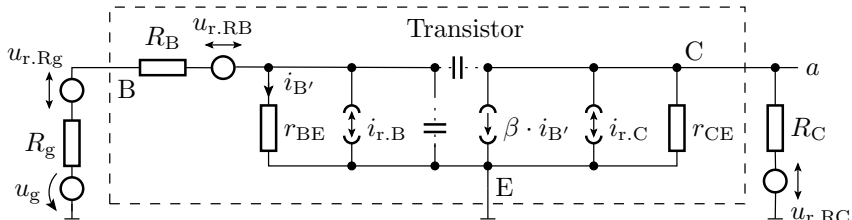
$$i_{B'} = \frac{u_g}{R_g + R_B + r_{BE}}$$

$$u_a = -(R_C \parallel r_{CE}) \cdot \beta \cdot i_{B'} = \frac{-(R_C \parallel r_{CE}) \cdot \beta}{R_g + R_B + r_{BE}} \cdot u_g$$

$$v_u = \frac{u_a}{u_g} = -\frac{(R_C \parallel r_{CE}) \cdot \beta}{R_g + R_B + r_{BE}}$$

Äquivalentes Ausgangsrauschen:

$$u_{r,a}^2 = (u_{r,a,Rg}^2 + u_{r,a,RB}^2) \cdot v_u^2 + \dots$$

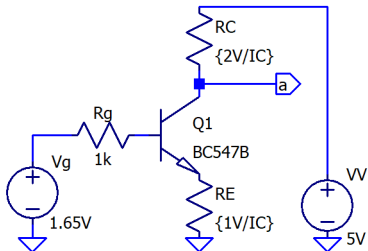


Äquivalentes Ausgangsrauschen:

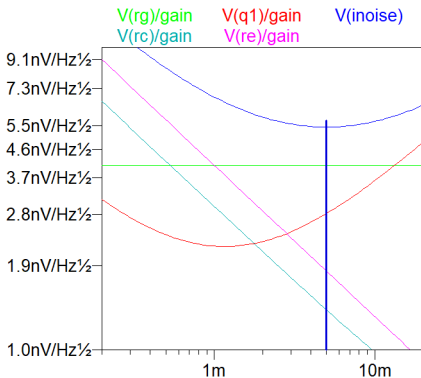
$$\begin{aligned}
 u_{r,a}^2 &= (u_{r,Rg}^2 + u_{r,RB}^2) \cdot v_u^2 \\
 &+ \left(\beta^2 \cdot \left(\frac{R_g + R_B}{R_g + R_B + r_{BE}} \right)_{(*)}^2 \cdot (i_{r,B}^2 + i_{r,C}^2) \right) \cdot (R_C \parallel r_{CE})^2 \\
 &+ u_{r,RC}^2 \cdot \left(\frac{r_{CE}}{r_{CE} + R_C} \right)_{(**)}^2
 \end{aligned}$$

($*$) – Stromteilerregel; ($**$) – Spannungsteilerregel).

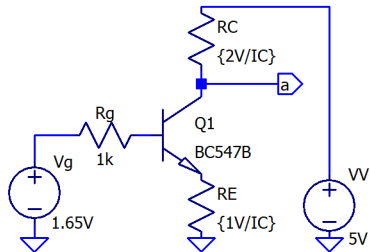
Rauschverhalten eines Transistorverstärkers



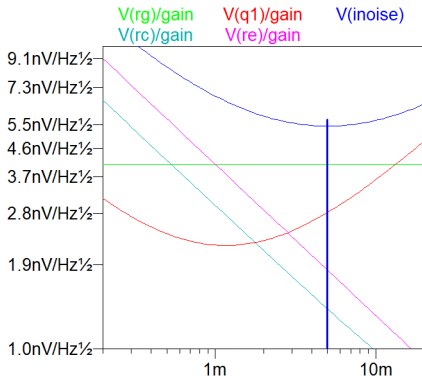
```
.step oct param IC 200µA 20mA 10
.noise V(a) Vg list 1kHz
```



Die von 200 μV bis 20 mV durchgestepte Variable IC legt R_C und R_E so fest, dass sich etwa Verstärkung 2 mit dem vorgegebenen Kollektorstrom »IC« einstellt. Es wird nur die Rauschdichte für 1 kHz geteilt durch die Verstärkung (äquivalente Eingangsräuschkichte).



```
.step oct param IC 200µA 20mA 10
.noise V(a) Vg list 1kHz
```



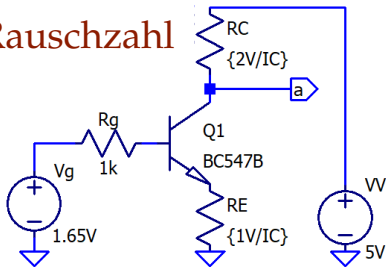
Mit Zunahme von I_C :

- bleibt die äquivalente Rauschdichte von R_g unverändert,
- nimmt die für R_C und R_E mit Exponent $\sim I_C^{-0,5} - 0,5$ ab und
- durchläuft die für den Transistor ein Minimum bei $I_C \approx 1 \text{ mA}$.

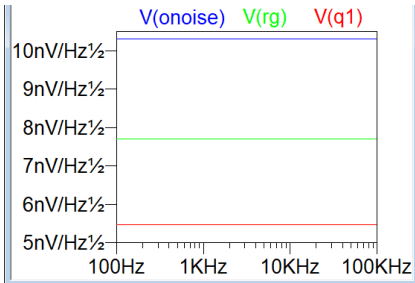
Das Minimum des äquivalenten Eingangsrauschen unter Berücksichtigung auch des von R_E und R_C liegt etwa bei $I_C \approx 5 \text{ mA}$.



Rauschzahl



```
.param IC 5mA
.noise V(a) Vg oct 10 100Hz 100kHz
.meas noise reff_Rg integ V(Rg)
.meas noise reff_a integ V(onoise)
.meas noise reff_q1 integ V(q1)
```



```
reff_rg: INTEG(v(rg))=2.43458e-06 FROM 100 TO 100000
reff_a: INTEG(v(onoise))=3.26019e-06 FROM 100 TO 100000
reff_q1: INTEG(v(q1))=1.72941e-06 FROM 100 TO 100000
```

Für $I_C = 5 \text{ mA}$ sind die Rauschdichten im betrachteten Frequenzbereich von 100 Hz bis 100 kHz konstant. Effektivwertanteile Ausgangsrauschen:

- R_g : $2,43 \mu\text{V}$
- Transistor: $1,73 \mu\text{V}$
- insgesamt: $3,26 \mu\text{V}$
- Rest (R_E und R_C): $\sqrt{(3,26)^2 - (2,43)^2 - (1,73)^2} \mu\text{V} = 1,31 \mu\text{V}$



Rauschzahl

Die Rauschzahl F beschreibt die Verschlechterung des Signal-Rausch-Abstands durch einen Verstärker als Verhältnis des SNR, wenn nur das Rauschen des Generatorwiderstands berücksichtigt wird:

$$SNR_{Rg} = \frac{U_{\text{eff.a}}^2}{u_{\text{reff.a.Rg}}^2}$$

zum SNR unter Berücksichtigung aller Rauschquellen

$$SNR = \frac{U_{\text{eff.a}}^2}{u_{\text{reff.a}}^2}$$

Die Effektivwerte des Nutzsignals $u_{\text{eff.a}}$ kürzt sich heraus:

$$F = \frac{SNR_{Rg}}{SNR} = \frac{u_{\text{reff.a}}^2}{u_{\text{reff.a.Rg}}^2}$$

Für das Beispiel:

$$F = \left(\frac{3,26 \mu\text{V}}{2,43 \mu\text{V}} \right)^2 = 1,8$$



Zum Signal-Rausch-Abstand

Signal-Rausch-Abstand ist das Verhältnis der Leistung des Nutzsignals zur Leistung des Rauschsignals an einem Lastwiderstand:

$$SNR = \frac{U_{\text{eff}}^2}{u_{\text{reff}}^2}$$

Der Effektivwert des Nutzsignals ist der Leistungsmittelwert (engl. root mean square):

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)^2 \cdot dt}$$

(T – Dauer Signalperiode). Für Kosinussignale $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t)$:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U}$$

(\hat{U} – Amplitude).

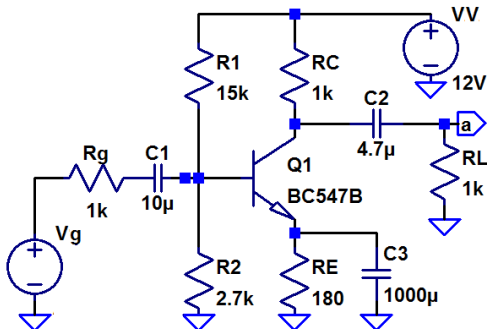


Effektivwerte wichtiger Signalformen

	Effektivwert		Effektivwert
	$\frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$		$\frac{x_{\max}}{\sqrt{3}}$
	$\frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$		x_{\max}
	$\frac{x_{\max}}{2}$		$\sqrt{\frac{t_1}{T}} \cdot x_{\max}$

Beispielrechnung

	u_{reff} an a
R_G	227 μV
R_1	58 μV
R_2	138 μV
Q1	150 μV
gesamt	310 μV
gain	44,83



Kosinusförmiges Eingangssignal: $u_g = 30 \mu\text{V} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ kHz})$.

- Effektive Eingangsspannung: $U_{\text{eff.g}} = \frac{30 \mu\text{V}}{\sqrt{2}} = 21,21 \mu\text{V}$
- Effektive Ausgangsspannung: $U_{\text{eff.a}} = 44,83 \cdot u_{\text{eff.e}} = 951 \mu\text{V}$
- äquivalente Gesamttrauschspannung an a : $u_{\text{reff.a}} = 310,4 \mu\text{V}$
- äquivalentes Eingangsrauschen: $u_{\text{reff.g}} = 6,92 \mu\text{V}$

Signal-Rausch-Abstand:

$$SNR = \frac{(951 \mu\text{V})^2}{(310,4 \mu\text{V})^2} = \frac{(21,21 \mu\text{V})^2}{(6,92 \mu\text{V})^2} = 9,4$$