Elektronik 1, Foliensatz 6: geschaltete Systeme

G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU-Clausthal (E1F6.pdf)

28. August 2023

Inhalt Foliensatz 6

Geschaltete Systeme

Geschaltete Systeme

Modell für Systeme, deren Eingaben oder Arbeitsbereiche sprunghaft wechseln:

- digitale Systeme, gepulste Ausgabe,
- Wechsel zwischen linearen Kennlinienästen,
- Abschätzung der Dauer von Ausgleichsvorgängen.

Rechtecksignal: Signal, dessen Wert sich zu den Zeitpunkten t_i sprunghaft ändert und sonst konstant bleibt[1].

Einheitssprung:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Sprungantwort: Reaktion eines linearen Systems auf einen Einheitssprung:

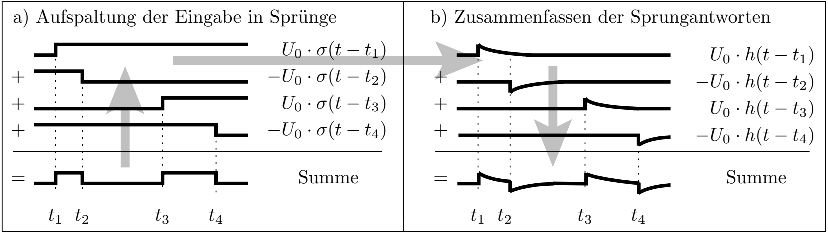
$$h(t) = f(\sigma(t))$$

[1] Theoretisches Modell. Praktisch können sich Ströme und Spannungen wegen der immer vorhandenen L's und C's nicht sprunghaft ändern.

Sprungantwort

Bedeutung der Sprungantwort

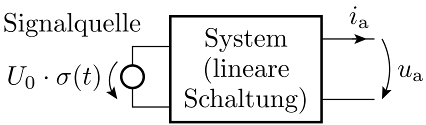
- Die Systemreaktion eines geschalteten linearen Systems ist eine Linearkombination zeitversetzter Sprungantworten.



$$f\left(X_0+\sum_{i=1}^{N} X_i\cdot\sigma\left(t-t_i\right)\right)=f\left(X_0\right)+\sum_{i=0}^{N-1} X_i\cdot h\left(t-t_i\right)$$

$\Rightarrow$ Erlaubt einfache Überschläge und Abschätzungen.

Messen der Sprungantwort



Messsignal	Sprungantwort
$i_\mathrm{a}(U_0 \cdot \sigma(t))$	$\frac{i_\mathrm{a}}{U_0}$
$u_\mathrm{a}(U_0 \cdot \sigma(t))$	$\frac{u_\mathrm{a}}{U_0}$

- Anlegen eines Eingabesprungs.
- Aufzeichnen der Systemreaktion:

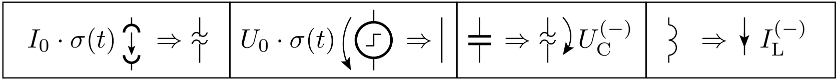
$$f\left(U_0 \cdot \sigma\left(t\right)\right) = U_0 \cdot f\left(\sigma\left(t\right)\right) = U_0 \cdot h\left(t\right)$$

- Die Sprungantwort ist:

$$h\left(t\right) = \frac{f\left(U_0 \cdot \sigma\left(t\right)\right)}{U_0}$$

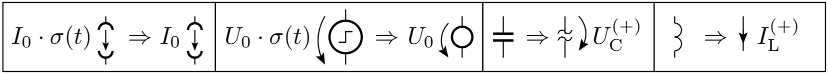
Anfangs- und Endwerte

Vor dem Sprung $(t<0)$:



- $U^{(-)}$, $I^{(-)}$ stationäre Spannungen und Ströme vor dem Sprung.

Stationärer Zustand[2] lange nach dem Sprung $(t\gg 0)$:

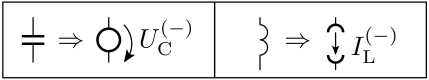


- $U^{(+)}$, $I^{(+)}$ stationäre Spannungen und Ströme nach dem Sprung.

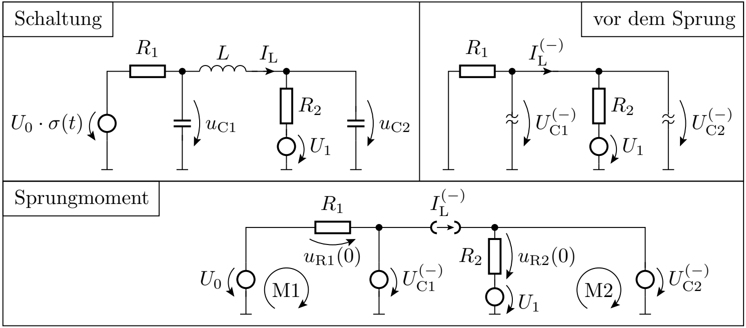
[2] Es ist hier vorausgesetzt, dass die Schaltung den stationären Zustand erreicht, d.h. dass sie nicht schwing. Ob ein System schwingt oder nicht, kann man ausprobieren, simulieren, ... Mathematik dazu Laplace-Transformation, nicht in dieser Vorlesung.

Im Moment des Sprunges $(t = 0)$:

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{C}}(0) &= \frac{1}{C} \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \int_0^{\Delta T} i_{\mathrm{C}}(t) \cdot d\,t + U_{\mathrm{C}}^{(-)} = U_{\mathrm{C}}^{(-)} \\
i_{\mathrm{L}}(0) &= \frac{1}{L} \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \int_0^{\Delta T} u_{\mathrm{L}}(t) \cdot d\,t + I_{\mathrm{L}}^{(-)} = I_{\mathrm{L}}^{(-)}
\end{aligned}
$$



Anwendung auf ein Schaltungsbeispiel

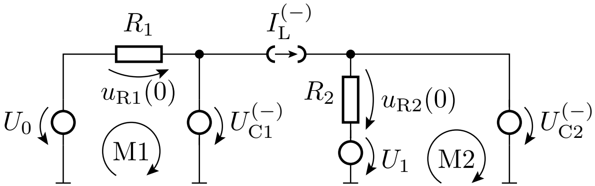


- Stationärer Zustand vor dem Sprung:

$$U_{C1}^{(-)} = U_{C2}^{(-)} = U_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

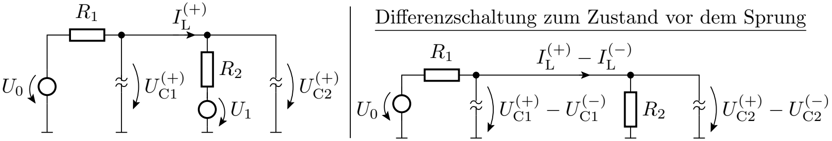
$$I_L^{(-)} = -\frac{U_1}{R_1 + R_2}$$

Im Sprungmoment



$$u_{R1}(0) = U_0 - U_{C1}^{(-)}$$
$$u_{R2}(0) = U_{C2}^{(-)} - U_1$$

Stationärer Zustand nach dem Sprung



$$U_{C1}^{(+)} - U_{C1}^{(-)} = U_{C2}^{(+)} - U_{C2}^{(-)} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

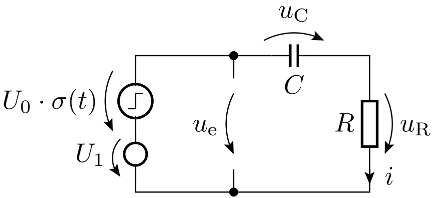
$$I_L^{(+)} - I_L^{(-)} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Die Abschätzung der stationären Werte vor und lange nach einem Sprung sowie im Sprungmoment ist nützlich,

- um Simulationsergebnisse auf Glaubwürdigkeit zu untersuchen,
- Größenordnungen der Ströme und Spannungen abzuschätzen, ...

Geschaltetes RC-Glied

Das geschaltete RC-Glied

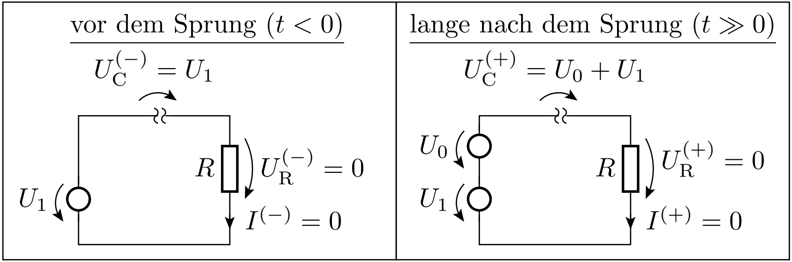


gesucht:

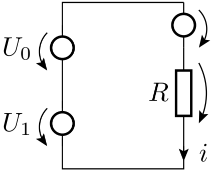
Anfangs- und Endwerte	$U_\mathrm{R}^{(-)} =$	$U_\mathrm{C}^{(-)} =$
	$u_\mathrm{R}(0) =$	$u_\mathrm{C}(0) =$
	$U_\mathrm{R}^{(+)} =$	$U_\mathrm{C}^{(+)} =$
Ausgabeverlauf	$u_\mathrm{R}(t) =$	$u_\mathrm{C}(t) =$

- Grundschaltung zur Abschätzung des dynamischen Verhaltens auch vieler anderer Schaltungen.

Anfangs- und Endwert



Ausgleichsvorgang



$$u_\mathrm{C}(n+1) = u_\mathrm{C}(n) + \frac{\Delta T}{C} \cdot i(n)$$

$$u_\mathrm{R}(n+1) = u_\mathrm{R}(n) - \frac{\Delta T}{C} \cdot i(n)$$

$$i = \frac{u_\mathrm{R}}{R}$$

Anfangswerte:

- Kapazität: $u_\mathrm{C}(0) = U_1$ (behält Wert)
- Widerstand: $u_\mathrm{R}(0) = U_0 + U_1 - u_\mathrm{C}(0) = U_0$ (Sprunghöhe)

Zeitdiskrete Berechnung

$$\begin{aligned} u_\mathrm{C}(n+1) &= u_\mathrm{C}(n) + \frac{\Delta T}{R \cdot C} \cdot u_\mathrm{R}(n) \\ u_\mathrm{R}(n+1) &= u_\mathrm{R}(n) - \frac{\Delta T}{R \cdot C} \cdot u_\mathrm{R}(n) = u_\mathrm{R}(n) \cdot \left(1 - \frac{\Delta T}{R \cdot C}\right) \end{aligned}$$

$$u_{\mathrm{R}}(n+1) = u_{\mathrm{R}}(n) \cdot \left(1 - \frac{\Delta T}{R \cdot C}\right) \Rightarrow u_{\mathrm{R}}(n) = u_{\mathrm{R}}(0) \cdot \left(1 - \frac{\Delta T}{R \cdot C}\right)^{n}$$

mit $n = \frac{t}{\Delta T}$, $u_{\mathrm{R}}(0) = U_0$, $\frac{\Delta T}{R \cdot C} = -x$ und $x \to 0$

- Spannungsverlauf Widerstand:

$$u_{\mathrm{R}}(t) = U_0 \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \left(1 - \frac{\Delta T}{R \cdot C}\right)^{\frac{t}{\Delta T}} = U_0 \cdot \left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- Spannungsverlauf Kapazität:

$$u_{\mathrm{C}}(t) = U_0 + U_1 - u_{\mathrm{R}}(t) = U_1 + U_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

- Stromverlauf:

$$i(t) = \frac{u_{\mathrm{R}}(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- Beide Spannungsverläufe und auch der Stromverlauf sind abklingende Exponentialfunktionen mit der Zeitkonstanten:

$$\tau = R \cdot C$$

Zusammenfassung

- Die Strom- und Spannungsverläufe am geschalteten RC-Glied sind abklingende Exponentialfunktionen, bei denen die Differenz zum stationären Wert $X^{(+)} - x(t)$ mit der Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ abnimmt:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} X^{(-)} & t < 0 \\ X^{(+)} - \left(X^{(+)} - x(0)\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \end{cases}}$$

$X^{(-)}$	stationärer Wert vor dem Sprung,
$X^{(+)}$	stationärer Wert lange nach dem Sprung,
$x(0)$	Wert im Moment des Sprungs.
$\tau = R \cdot C$	Zeitkonstante.

- Der stationäre Wert wird nach ca. $3 \cdot \tau$ bis $5 \cdot \tau$ erreicht.

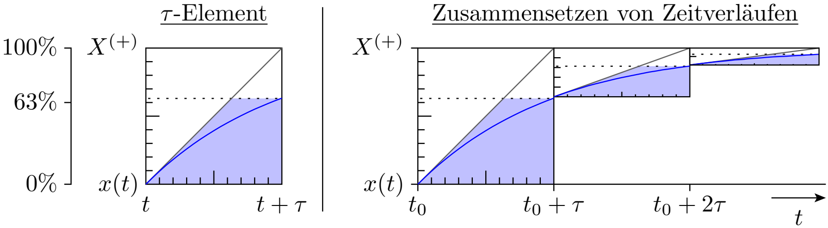
Graphische Konstruktion der Sprungantwort

(Abschätzung der Ausgabe geschalteter RC-Glieder)

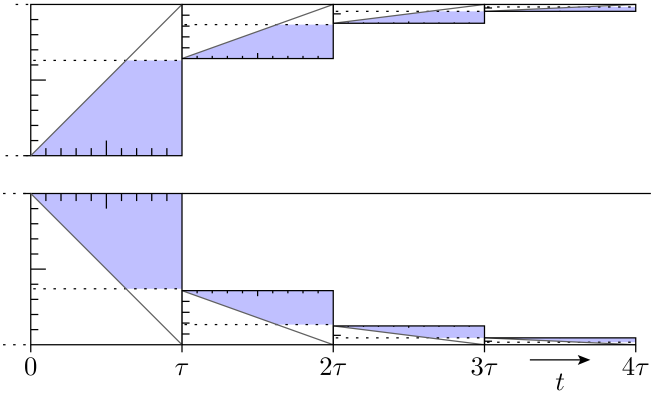
- Anstieg zum Zeitpunkt t

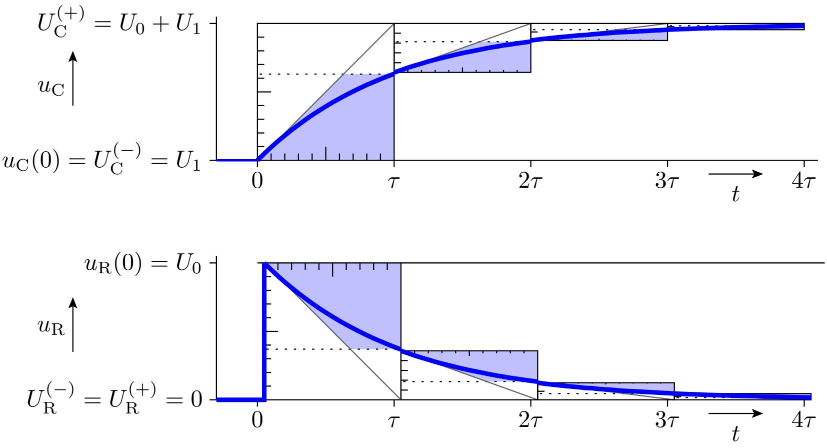
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{X^{(+)} - x(t)}{\tau}$$

- Der Betrag des Anstiegs nimmt ab.
- Nach τ wird $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 63\%$ des Endwerts erreicht.



	$i(t)$	$u_{\mathrm{R}}(t)$	$u_{\mathrm{C}}(t)$
vor dem Sprung	$I^{(-)}=0$	$U_{\mathrm{R}}^{(-)}=0$	$U_{\mathrm{C}}^{(-)}=U_1$
Sprungmoment	$i(0)=\frac{U_0}{R}$	$u_{\mathrm{R}}(0)=U_0$	$u_{\mathrm{C}}(0)=U_1$
stat. nach Sprung	$I^{(+)}=0$	$U_{\mathrm{R}}^{(+)}=0$	$U_{\mathrm{C}}^{(+)}=U_0+U_1$

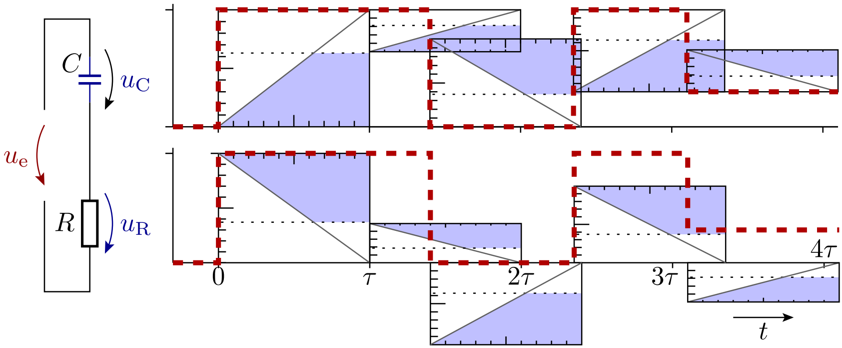


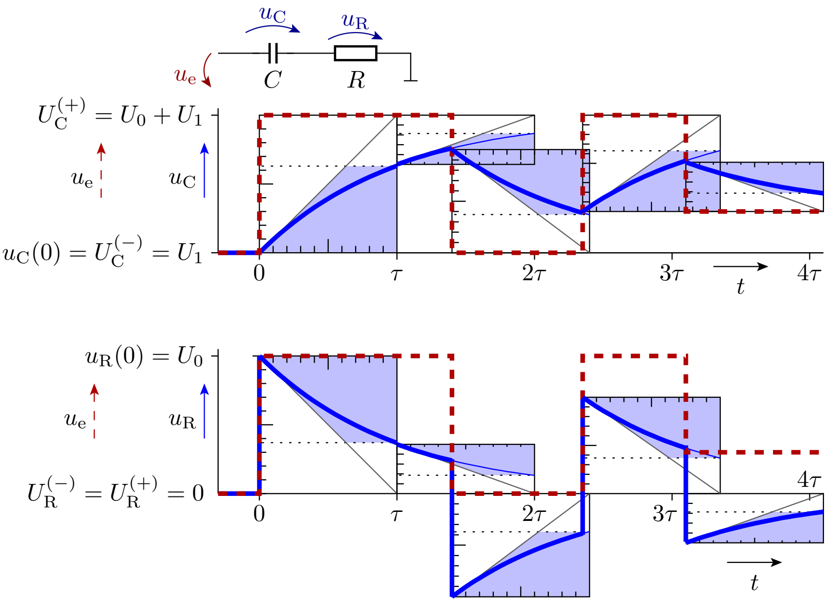


$U_{\mathrm{C}}^{(+)} = U_0 + U_1$
u_{C}
$u_{\mathrm{C}}(0) = U_{\mathrm{C}}^{(-)} = U_1$
0
τ
2τ
3τ
4τ
t
$u_{\mathrm{R}}(0) = U_0$
u_{R}
$U_{\mathrm{R}}^{(-)} = U_{\mathrm{R}}^{(+)} = 0$
0
τ
2τ
3τ
4τ
t

Ausgabe für eine Folge von Schaltvorgängen

- Konstruktion u_C: Anfangswert gleich Endwert im vorherigen τ-Element (Stetigkeit). $U_\mathrm{C}^{(+)} = u_\mathrm{e}$
- Konstruktion u_R: Anfangswert resultiert aus der Maschengleichung $u_\mathrm{R} = u_\mathrm{e} - u_\mathrm{C}$. $U_\mathrm{R}^{(+)} = 0$

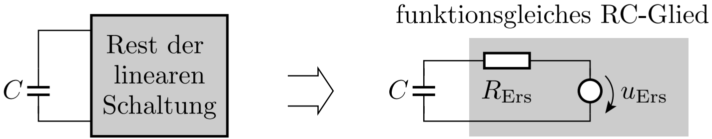



u_C
u_R
u_e
C
R
$U_\mathrm{C}^{(+)} = U_0 + U_1$
u_e
u_C
$u_\mathrm{C}(0) = U_\mathrm{C}^{(-)} = U_1$
0
τ
2τ
3τ
t
4τ
$u_\mathrm{R}(0) = U_0$
u_e
u_R
$U_\mathrm{R}^{(-)} = U_\mathrm{R}^{(+)} = 0$
0
τ
2τ
3τ
4τ
t

RC-Glied, Abbildung auf

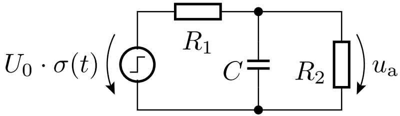
Transformation in ein geschaltetes RC-Glied

Alle linearen (oder abschnittsweise linearen) Schaltungen mit einer wesentlichen Kapazität und ohne (wesentliche) Induktivitäten lassen sich in ein funktionsgleiches RC-Glied umrechnen:

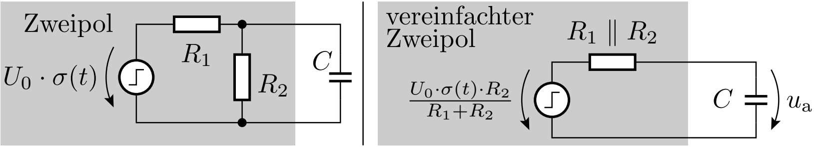


»Wesentlich« bedeutet, dass die Umladezeitkonstanten für alle anderen Kapazitäten und Induktivitäten viel keiner sind.

Belastetes RC-Glied



- Was bewirkt der Widerstand parallel zur Kapazität?



Der Widerstand parallel zur Kapazität bewirkt:

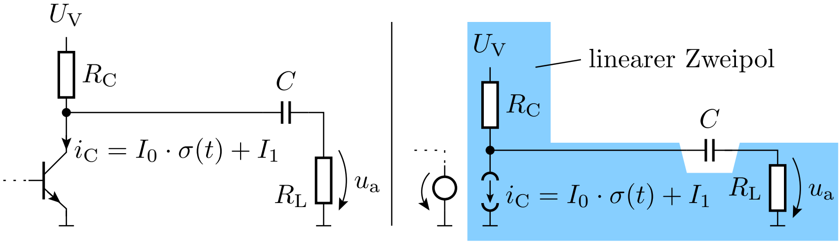
- eine Verringerung der Sprunghöhe:

$$u_{\mathrm{Ers}} = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sigma(t)$$

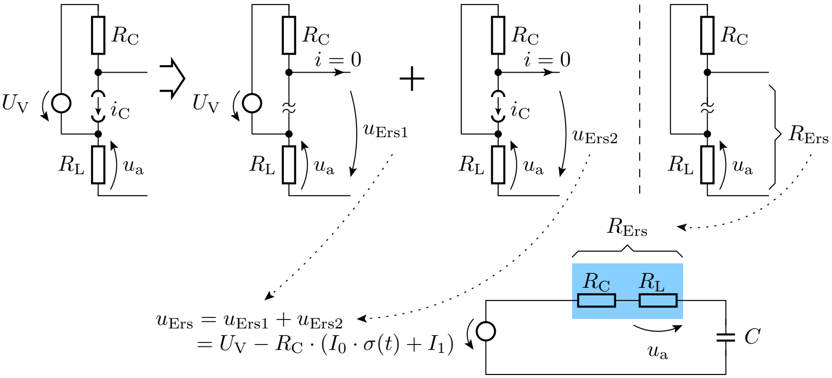
- eine Verkürzung der Zeitkonstante:

$$\tau = (R_1 \parallel R_2) \cdot C$$

Transistor als geschaltete Stromquelle



- Transistor durch lineare Ersatzschaltung ersetzen.
- Den blau unterlegten Zweipol in eine Reihenschaltung aus einer geschalteten Quelle, einer konstanten Quelle und einem Widerstand umrechnen.



$$u_{Ers} = u_{Ers1} + u_{Ers2}$$
$$= U_V - R_C \cdot (I_0 \cdot \sigma(t) + I_1)$$

Zeitkonstante:

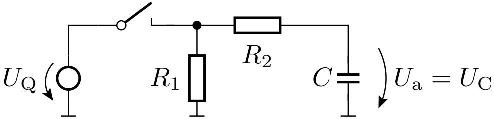
$$\tau = (R_C + R_L) \cdot C$$

Sprunghöhe von u_a:

$$u_a(0) = -I_0 \cdot \frac{R_C \cdot R_L}{R_C + R_L} = -I_0 \cdot (R_C \parallel R_L)$$

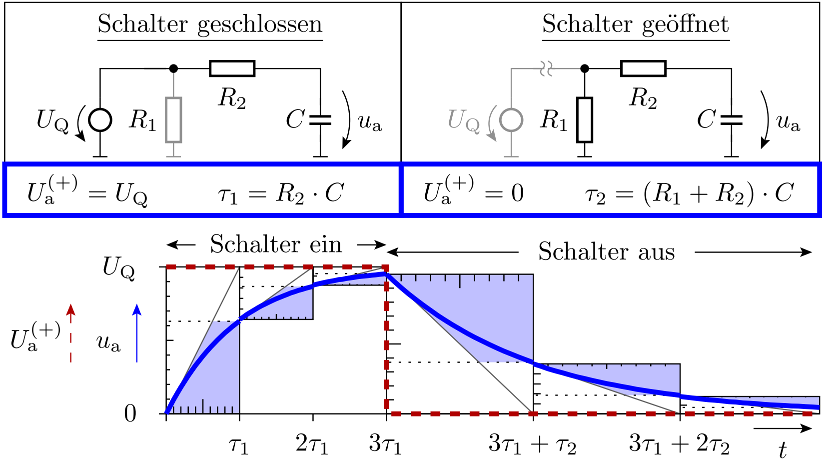
Abschnittsweise Annäherung durch geschaltete RC-Glieder

Die Abbildung auf ein geschaltetes RC-Glied ist auch für einzelne Arbeitsbereiche möglich.



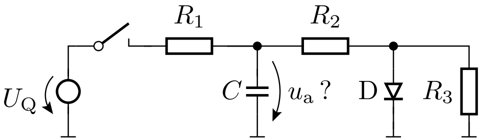
zwei lineare Arbeitsbereiche:

- Schalter geschlossen,
- Schalter geöffnet.



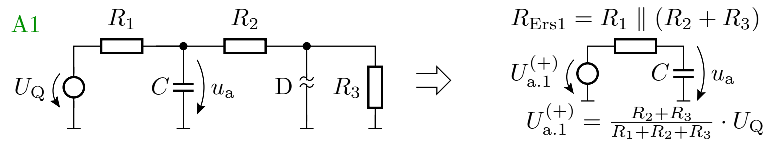
Schalter geschlossen
U_Q
R_1
R_2
C
u_a
Schalter geöffnet
U_Q
R_1
R_2
C
u_a
$U_a^{(+)} = U_Q$ $\tau_1 = R_2 \cdot C$
$U_a^{(+)} = 0$ $\tau_2 = (R_1 + R_2) \cdot C$
Schalter ein
Schalter aus
U_Q
$U_a^{(+)}$
u_a
0
τ_1
$2\tau_1$
$3\tau_1$
$3\tau_1 + \tau_2$
$3\tau_1 + 2\tau_2$
t

Gesucht: Zeitkonstanten und stationäre Endwerte



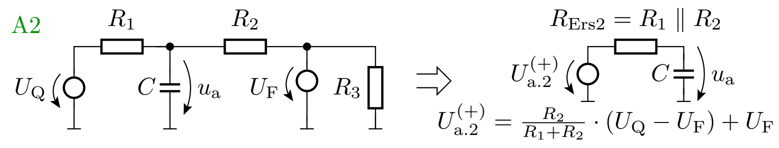
Arbeitsbereiche:

- A1 Schalter geschlossen, Diode gesperrt.
- A2 Schalter geschlossen, Diode leitend.
- A3 Schalter geöffnet, Diode leitend.
- A4 Schalter geöffnet, Diode gesperrt.



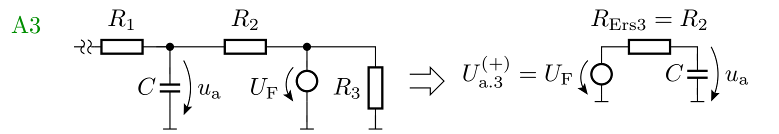
$$R_{\text{Ers1}} = R_1 \parallel (R_2 + R_3)$$

$$U_{\text{a.1}}^{(+)} = \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot U_{\text{Q}}$$



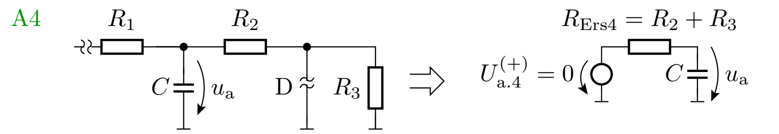
$$R_{\text{Ers2}} = R_1 \parallel R_2$$

$$U_{\text{a.2}}^{(+)} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot (U_{\text{Q}} - U_{\text{F}}) + U_{\text{F}}$$



$$R_{\text{Ers3}} = R_2$$

$$U_{\text{a.3}}^{(+)} = U_{\text{F}}$$



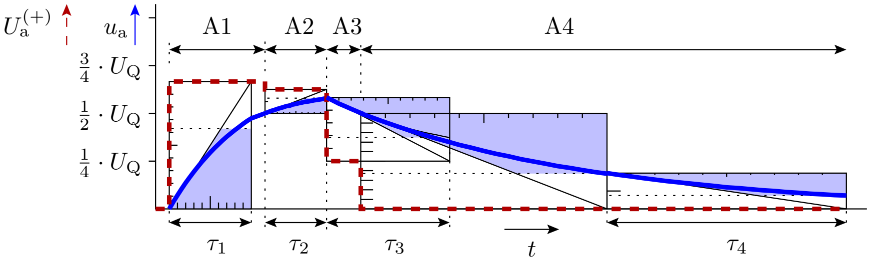
$$R_{\text{Ers4}} = R_2 + R_3$$

$$U_{\text{a.4}}^{(+)} = 0$$

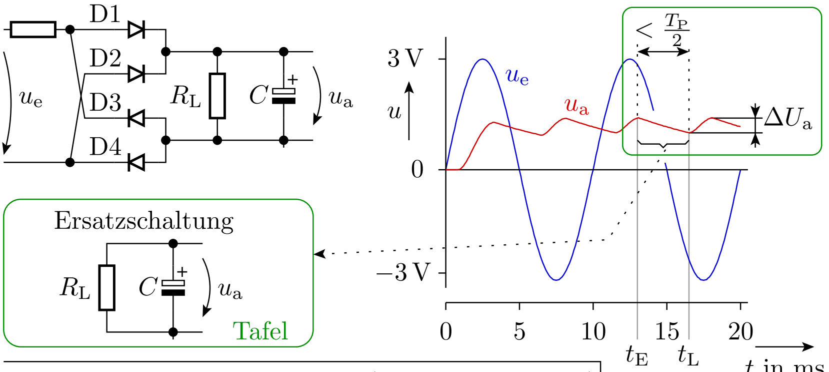
$U_{\text{a.}i}^{(+)}$, τ_i für $R_1 = R_2 = R_3 = R$ und $U_{\text{Q}} = 4 \cdot U_{\text{F}} \Rightarrow$ Tafel

Ausgabe für: $R_1 = R_2 = R_3 = R;\ U_Q = 4 \cdot U_F$

	A1	A2	A3	A4
Schalter	geschlossen	geschlossen	geöffnet	geöffnet
Diode	gesperrt	leitend	leitend	gesperrt
u_a	$\leq \frac{1}{2} \cdot U_Q$	$> \frac{1}{2} \cdot U_Q$	$> \frac{1}{2} \cdot U_Q$	$\leq \frac{1}{2} \cdot U_Q$
τ_i	$\frac{2}{3} \cdot R \cdot C$	$\frac{1}{2} \cdot R \cdot C$	$R \cdot C$	$2 \cdot R \cdot C$
$U_{a.i}^{(+)}$	$\frac{2}{3} \cdot U_Q$	$\frac{5}{8} \cdot U_Q$	$\frac{1}{4} \cdot U_Q$	0



Glättungskondensator hinter einem Gleichrichter



t_E	Zeit Beginn Entladevorgang (Ende Ladevorgang)
t_L	Zeit Beginn Ladevorgang (Ende Entladevorgang)

Entladefunktion: $u_a(t) = u_a(t_E) \cdot e^{-\frac{t-t_E}{R_L \cdot C}}$

Die Größe des Kondensators ergibt sich aus der zulässigen Restwelligkeit:

$$\Delta U_{\mathrm{a.rel}} = \frac{U_{\mathrm{a.max}} - U_{\mathrm{a.min}}}{U_{\mathrm{a.max}}}$$

Maximalwert: Beginn der Entladephase:

$$U_{\mathrm{a.max}} = u_{\mathrm{a}}\left(t_{\mathrm{E}}\right)$$

Minimalwert: Ende der Entladephase:

$$U_{\mathrm{a.min}} = u_{\mathrm{a}}\left(t_{\mathrm{E}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{L}} \cdot C}}$$

Relative Restwelligkeit:

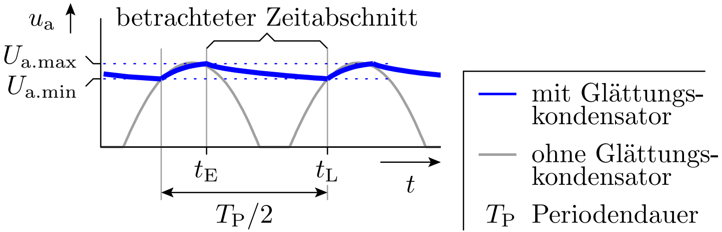
$$\Delta U_{\mathrm{a.rel}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{L}} \cdot C}}$$

Erforderliche Kapazität:

$$C \geq -\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{L}} \cdot \ln\left(1 - \Delta U_{\mathrm{a.rel}}\right)}$$

$$C \geq -\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{L}} \cdot \ln\left(1 - \Delta U_{\mathrm{a.rel}}\right)}$$

Worst Case: $t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{E}} \leq \frac{T_{\mathrm{P}}}{2}$



Praktische Dimensionierung:

$$C \geq -\frac{T_{\mathrm{P}}}{2 \cdot R_{\mathrm{L}} \cdot \ln\left(1 - \Delta U_{\mathrm{a.rel}}\right)}$$

Beispiel

Wie groß ist der Glättungskondensator zu wählen:

- $R_{\mathrm{L}} \geq 100\,\Omega$
- Wechselspannung mit einer Frequenz von 50 Hz
- maximale relative Restwelligkeit $\Delta U_{\mathrm{a.rel}} \leq 10\%$

50 Hz ⇒ Periodendauer $T_{\mathrm{P}} = 20\,\mathrm{ms}$.

$$C \geq -\frac{20\,\mathrm{ms}}{2 \cdot 100\,\Omega \cdot \ln\left(1 - 10\%\right)} \approx 950\,\mu\mathrm{F}$$

Der nächst größere verfügbare Standardwert ist $1000\,\mu\mathrm{F}$.

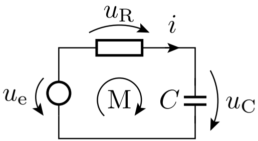
Geschaltetes RL-Glied

Duale Schaltung zum geschalteten RC-Glied

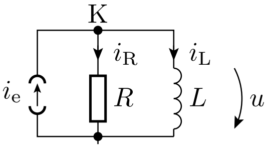
Vertauschen der Bedeutung von Strom und Spannung:

- Kapazität ⇔ Induktivität: $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; u = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
- Widerstand ⇔ Leitwert: $u = R \cdot i \;\Rightarrow\; i = R^{-1} \cdot u$
- Spannungsquelle ⇔ Stromquelle
- Reihenschaltung ⇔ Parallelschaltung
- Masche ⇔ Knoten.

RC-Glied $\Longleftrightarrow$ RL-Glied



$\Longleftrightarrow$

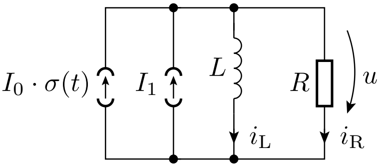


M: $u_R + u_C = u_e$
mit: $u_R = R \cdot i$
$i = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$\Longleftrightarrow$

K: $i_R + i_L = i_e$
mit: $i_R = R^{-1} \cdot u$
$u = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

Grundschaltung eines geschalteten RL-Gliedes

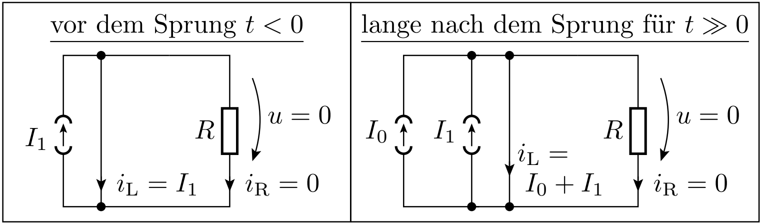


gesucht:

Anfangs- und Endwerte
$$\left\{\begin{array}{llll} I_R^{(-)} = & & I_L^{(-)} = & \\ i_R(0) = & & i_L(0) = & \\ I_R^{(+)} = & & I_L^{(+)} = & \end{array}\right.$$

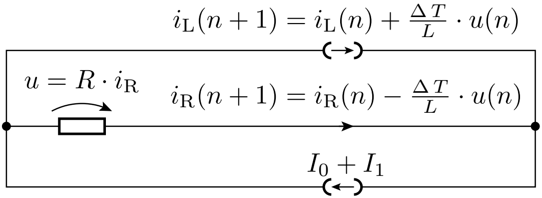
Ausgabeverlauf $i_R(t) =$ $\quad i_L(t) =$

Anfangs- und Endwert



	$u(t)$	$i_R(t)$	$i_L(t)$
vor dem Sprung	$U^{(-)} = 0$	$I_R^{(-)} = 0$	$I_L^{(-)} = I_1$
Sprungmoment	$u(0) = I_0 \cdot R$	$i_R(0) = I_0$	$i_L(0) = I_1$
stationärer Wert nach dem Sprung	$U^{(+)} = 0$	$I_R^{(+)} = 0$	$I_L^{(+)} = I_0 + I_1$

Umladevorgang



Anfangswerte:

- Induktivität: $i_{\mathrm{L}}(0) = I_{\mathrm{L}}^{(-)} = I_1$
- Widerstand: $i_{\mathrm{R}}(0) = I_0 + I_1 - i_{\mathrm{L}}(0) = I_0$

zeitdiskrete Berechnung:

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{L}}(n+1) &= i_{\mathrm{L}}(n) + \frac{R \cdot \Delta T}{L} \cdot i_{\mathrm{R}}(n) \\
i_{\mathrm{R}}(n+1) &= i_{\mathrm{R}}(n) - \frac{R \cdot \Delta T}{L} \cdot i_{\mathrm{R}}(n) = i_{\mathrm{R}}(n) \cdot \left(1 - \frac{R \cdot \Delta T}{L}\right)
\end{aligned}
$$

$$i_{\mathrm{R}}(n+1) = i_{\mathrm{R}}(n)\cdot\left(1-\frac{R\cdot\Delta T}{L}\right) \Rightarrow i_{\mathrm{R}}(n) = i_{\mathrm{R}}(0)\cdot\left(1-\frac{R\cdot\Delta T}{L}\right)^{n}$$

mit $n=\frac{t}{\Delta T}$, $i_{\mathrm{R}}(0)=I_0$, $\frac{R\cdot\Delta T}{L}=-x$ und $x\to 0$

- Stromverlauf Widerstand:

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{R}}(t) &= I_0\cdot\lim_{\Delta T\to 0}\left(1-\frac{R\cdot\Delta T}{L}\right)^{\frac{t}{\Delta T}} = I_0\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)}_{\mathrm{e}}^{-\frac{R\cdot t}{L}} \\ &= I_0\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

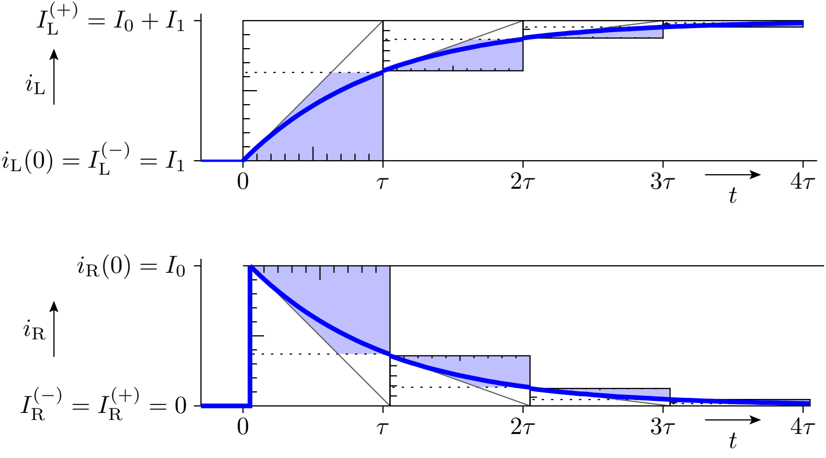
  mit der Zeitkonstanten:

$$\tau=\frac{L}{R}$$

- Stromverlauf Induktivität:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = I_1 + I_0\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Konstruktion der Sprungantwort

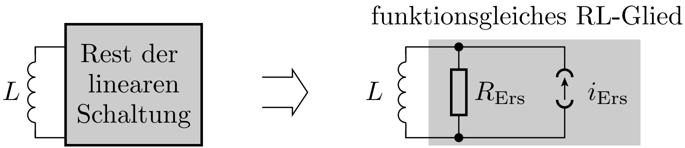


(Zusammensetzen aus τ-Elementen)

RL-Glied, Abbildung auf

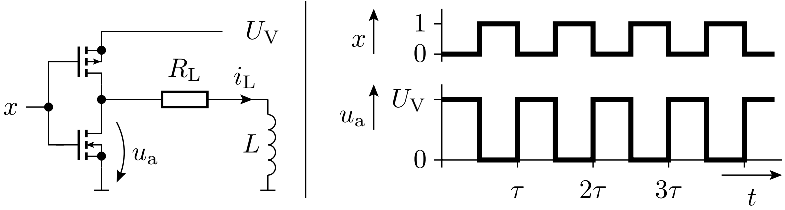
Transformation in ein funktionsgleiches geschaltetes RL-Glied

Alle linearen (oder abschnittsweise linearen) Schaltungen mit einer wesentlichen Induktivität und ohne (wesentliche) Kapazität lassen sich durch ein funktionsgleiches RL-Glied annähern:



»Wesentlich« bedeutet, dass die Umladezeitkonstanten für alle anderen Induktivitäten und Kapazitäten viel kleiner sind.

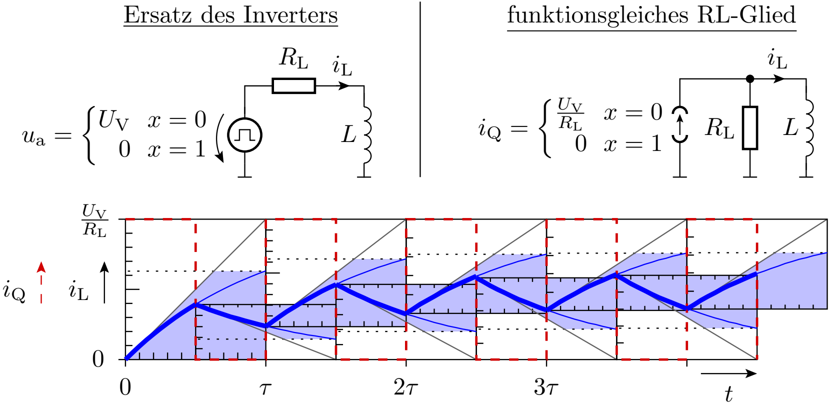
Ansteuerung eines Elektromagneten mit einem CMOS-Inverter



Wie lauten die Parameter des funktionsgleichen RL-Gliedes?
Welchen Signalverlauf hat der Strom i_L?
Das Modell des CMOS-Inverters sei:

$$u_a = \begin{cases} U_V & \textit{für} \quad x = 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

Lösung

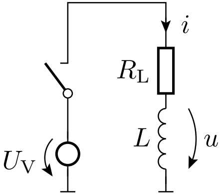

Ersatz des Inverters
R_L
i_L
$u_a = \begin{cases} U_V & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
L
funktionsgleiches RL-Glied
i_L
$i_Q = \begin{cases} \frac{U_V}{R_L} & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
R_L
L
$\frac{U_V}{R_L}$
i_Q
i_L
0
0
τ
2τ
3τ
t

Abschnittsweise Annäherung durch geschaltete RL-Glieder

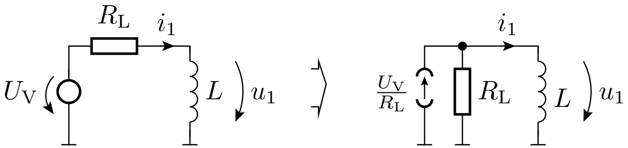
Die Abbildung auf ein geschaltetes RL-Glied ist auch für einzelne lineare Arbeitsbereiche möglich.

Zwei lineare Arbeitsbereiche:

- Schalter geschlossen,
- Schalter geöffnet.



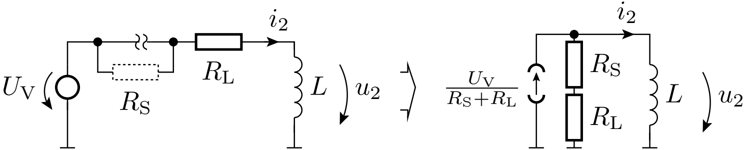
Funktionsgleiches RL-Glied für Schalter geschlossen



$$I_1^{(+)} = \frac{U_V}{R_L}$$

$$\tau_1 = \frac{L}{R_L}$$

Funktionsgleiches RL-Glied für Schalter geöffnet



$$I_2^{(+)} = \lim_{R_S\to\infty}\left(\frac{U_V}{R_L+R_S}\right) = 0$$

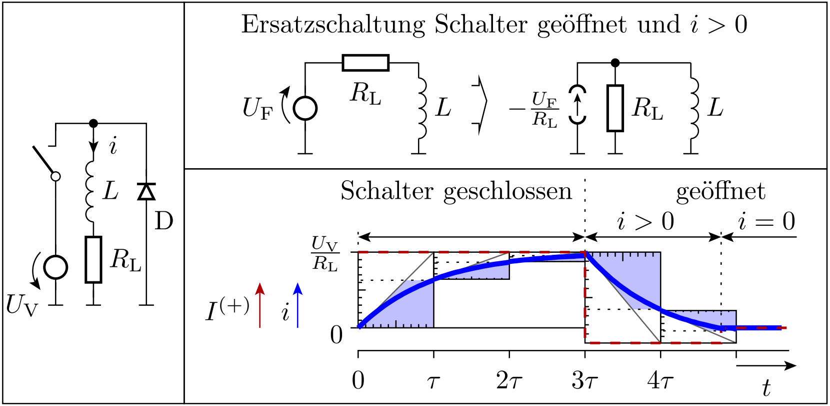
$$\tau_2 = \lim_{R_S\to\infty}\left(\frac{L}{R_L+R_S}\right) = 0$$

Problem: Ausschaltmoment

$$\begin{aligned} i_2(0) &= I_1^{(+)} = \frac{U_V}{R_L} \\ u_2(0) &= U_V - \lim_{R_S\to\infty}\left(\left(R_L+R_S\right)\cdot i_2(0)\right) \to -\infty \end{aligned}$$

Fast kompletter Abfall der unendlichen Induktionsspannung über öffnendem Kontakt. Da unendlicher Spannungsabfall nicht möglich, Funkenüberschlag. Kontaktverschleiß durch Verbrennen.

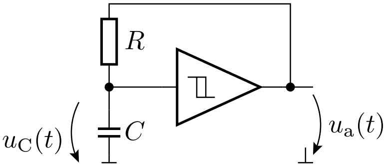
Freilaufdiode

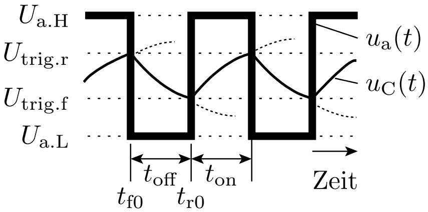


RC-Oszillator

Einfacher RC-Oszillator

- Prinzip: Periodisches Umladen eines RC-Gliedes.
- Beispiel: Umladesteuerung mit einem Schwellwertschalter mit Hysterese.



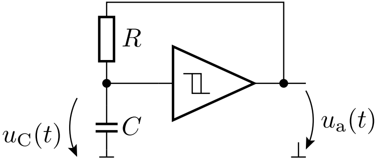


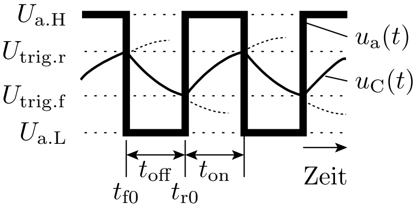
Entladefunktion:

$$u_C(t) = U_{a.L} - (U_{a.L} - U_{trig.r}) \cdot e^{-\frac{t-t_{f0}}{R \cdot C}}$$

Ladefunktion:

$$u_C(t) = U_{a.H} - (U_{a.H} - U_{trig.f}) \cdot e^{-\frac{t-t_{r0}}{R \cdot C}}$$





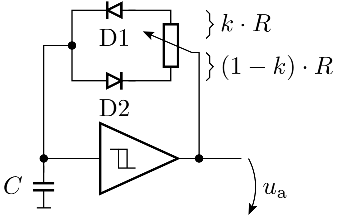
Entladezeit t_{off}, in der die Ausgangsspannung »0« ist:

$$\begin{aligned} U_{trig.f} &= U_{a.L} - (U_{a.L} - U_{trig.r}) \cdot e^{-\frac{t_{off}}{R \cdot C}} \\ t_{off} &= R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{U_{a.L} - U_{trig.r}}{U_{a.L} - U_{trig.f}}\right) \end{aligned}$$

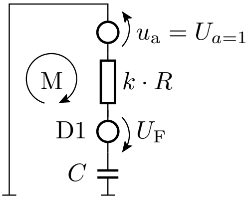
Die Aufladezeit t_{on}, in der die Ausgangsspannung »1« ist:

$$\begin{aligned} U_{trig.r} &= U_{a.H} - (U_{a.H} - U_{trig.f}) \cdot e^{-\frac{t_{on}}{R \cdot C}} \\ t_{on} &= R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{U_{a.H} - U_{trig.f}}{U_{a.H} - U_{trig.r}}\right) \end{aligned}$$

Rechteckgenerator mit einstellbarer Pulsweite



Ersatzschaltung Laden



Parameter:

$U_{\mathrm{C}}^{(+)} = U_{\mathrm{a.H}} - U_{\mathrm{F}}$

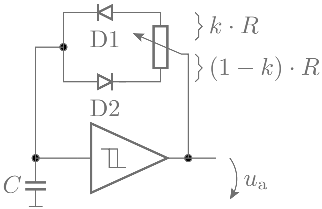
$u(0) = U_{\mathrm{trig.f}}$

$u(t_{\mathrm{on}}) = U_{\mathrm{trig.r}}$

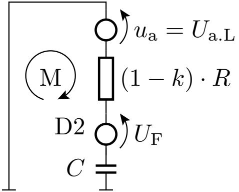
$\tau_{\mathrm{L}} = k \cdot R \cdot C$

Ladezeit:

$$t_{\mathrm{on}} = k \cdot R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{U_{\mathrm{a.H}} - U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.f}}}{U_{\mathrm{a.H}} - U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.r}}}\right)$$



Ersatzschaltung Entladen



Parameter:

$U_{\mathrm{C}}^{(+)} = U_{\mathrm{a.L}} + U_{\mathrm{F}}$

$u(0) = U_{\mathrm{trig.r}}$

$u(t_{\mathrm{off}}) = U_{\mathrm{trig.f}}$

$\tau_{\mathrm{E}} = (1-k) \cdot R \cdot C$

$$t_{\mathrm{off}} = (1-k) \cdot R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{U_{\mathrm{a.L}} + U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.r}}}{U_{\mathrm{a.L}} + U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.f}}}\right)$$

Mit

$$\left(\frac{U_{\mathrm{a.L}} + U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.r}}}{U_{\mathrm{a.L}} + U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.f}}}\right) = \left(\frac{U_{\mathrm{a.H}} - U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.f}}}{U_{\mathrm{a.H}} - U_{\mathrm{F}} - U_{\mathrm{trig.r}}}\right) = \text{konst.}$$

ist die absolute Pulsbreite konstant:

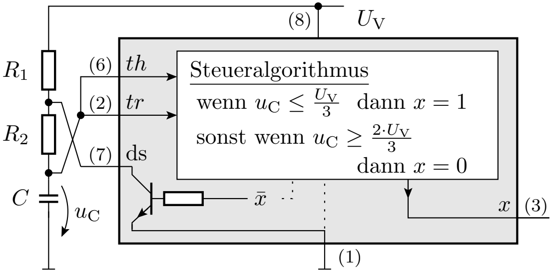
$$T_{\mathrm{P}} = t_{\mathrm{on}} + t_{\mathrm{off}} = R \cdot C \cdot \ln(\text{konst.})$$

und die relative Pulsbreite gleich dem Einstellwert: $\eta_{\mathrm{T}} = k$

Rechteckgenerator mit einem NE555

NE555: Standardschaltkreis für die Lade-Entlade-Steuerung eines geschalteten RC-Gliedes bestehend aus

- zwei Komparatoren und einem
- Transistor zum Entladen der Kapazität des RC-Gliedes.

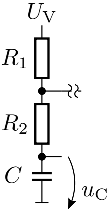


Anschlüsse

- th Trigger-Eingang "ein" (threshhold)
- tr Trigger-Eingang "aus" (trigger)
- ds Entladen (discharge)
- x Ausgang

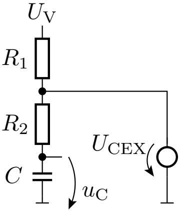
Aufladen über $R_1 + R_2$
Entladen über R_2

Ersatzschaltung Aufladevorgang
(Ausgang ist null)



Parameter:
$U_C^{(+)} = U_V$
$u_C(0) = \frac{U_V}{3}$
$u_C(t_{dr}) = \frac{2 \cdot U_V}{3}$
$\tau_{off} = (R_1 + R_2) \cdot C$

Ersatzschaltung Entladevorgang
(Ausgangs ist eins)



Parameter:
$U_C^{(+)} = U_{CEX} \approx 0{,}2\,\mathrm{V}$
$u(0) = \frac{2 \cdot U_V}{3}$
$u(t_{df}) = \frac{U_V}{3}$
$\tau_{on} = R_2 \cdot C$

$$u_C(t_{on}) = \frac{1}{3} \cdot U_V = U_{CEX} - \left(U_{CEX} - \frac{2}{3} \cdot U_V\right) \cdot e^{-\frac{t_{on}}{R_2 \cdot C}}$$

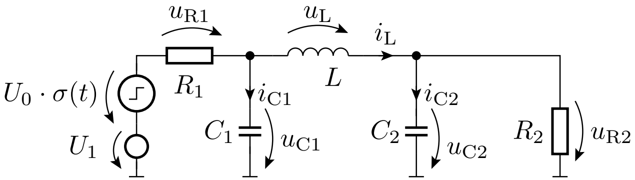
$$t_{on} = R_2 \cdot C \cdot \ln\left(\frac{U_{CEX} - \frac{2}{3} \cdot U_V}{U_{CEX} - \frac{1}{3} \cdot U_V}\right) \approx R_2 \cdot C \cdot \ln(2)$$

$$u_C(t_{off}) = \frac{2}{3} \cdot U_V = U_V - \left(U_V - \frac{1}{3} \cdot U_V\right) \cdot e^{-\frac{t_{off}}{(R_1 + R_2) \cdot C}}$$

$$t_{off} = \ldots = (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \ln(2)$$

Aufgaben

Aufgabe 6.1: Geschaltetes System

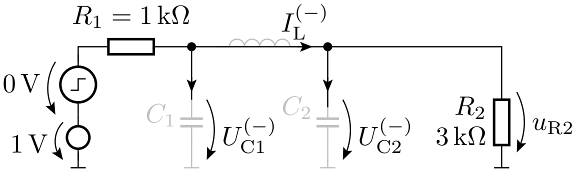


$U_0 = U_1 = 1\,\mathrm{V}$
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$
$C_1 = 1\,\mathrm{nF}$
$C_2 = 2\,\mathrm{nF}$
$L = 10\,\mathrm{mH}$

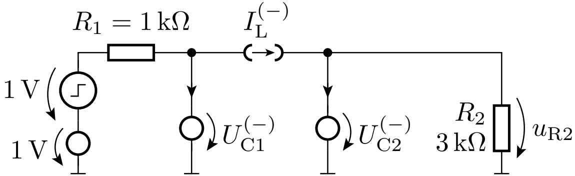
Schätzen Sie die Spannung u_{R2} für die stationären Zustände vor dem Sprung $(t < 0)$, im Sprungmoment $(t = 0)$ und lange nach dem Sprung $(t \gg 0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.1

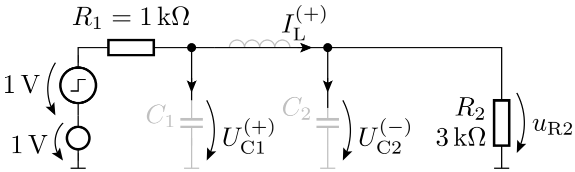
u_{R2} vor dem Sprung:



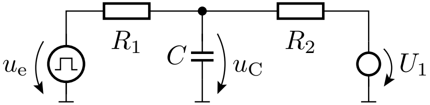
u_{R2} im Sprungmoment:

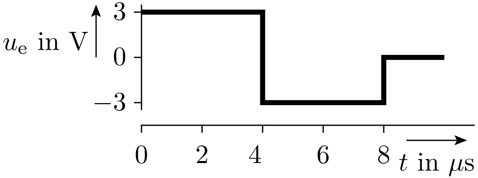


u_{R2} lange nach dem Sprung:



Aufgabe 6.2: Lineares System mit einer Kapazität

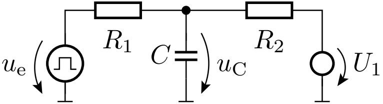


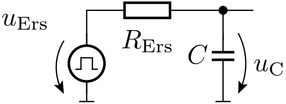


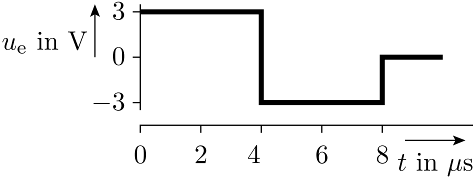
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$C = 3\,\mathrm{nF}$
$U_1 = 1{,}5\,\mathrm{V}$
$u_C(0) = 1\,\mathrm{V}$

1. Zeichnen Sie die funktionsgleiche Grundschaltung eines geschalteten RC-Glieds.
2. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ .
3. Konstruieren Sie den Spannungsverlaufs von u_C für $u_C\,(0) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6.2

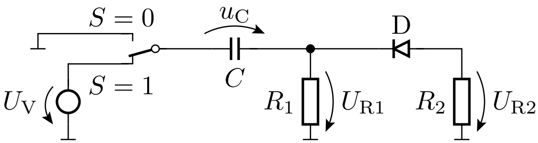






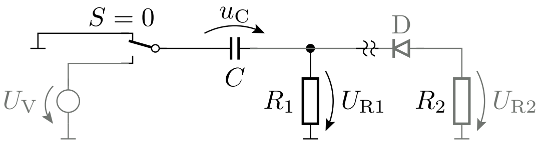
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$C = 3\,\mathrm{nF}$
$U_1 = 1{,}5\,\mathrm{V}$
$u_C(0) = 1\,\mathrm{V}$

Aufgabe 6.3: Abschnittsweise lineares geschaltetes System mit einer Kapazität

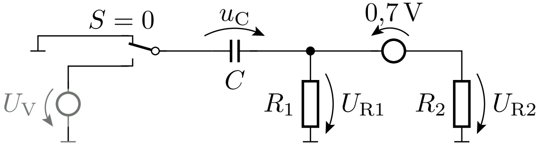


1. Welchen Arbeitsbereiche sind zu unterscheiden?
2. Entwickeln Sie für jeden Arbeitsbereich die Ersatzschaltung.
3. Bestimmen Sie für jeden Arbeitsbereich die Zeitkonstante.
4. Bestimmen Sie den stationären Wert, gegen den u_{C} in jedem Arbeitsbereich strebt.

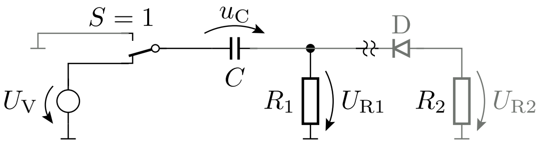
Schalter aus, Diode gesperrt:



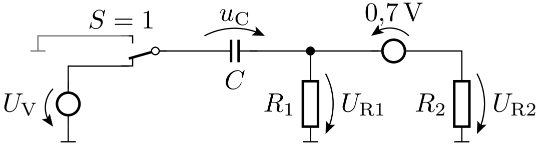
Schalter aus, Diode Durchlassbereich:



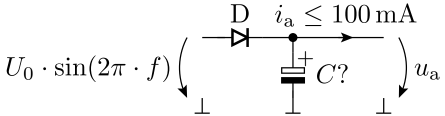
Schalter ein, Diode gesperrt:



Schalter ein, Diode Durchlassbereich:



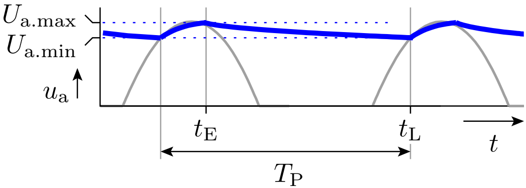
Aufgabe 6.4: Berechnung des Glättungskondensators



$U_0 = 12\,\mathrm{V}$
$\Delta U_{\mathrm{a.rel}} \le 5\%$
$f = 50\,\mathrm{Hz}$

Wie groß muss der Glättungskondensator hinter der Diode sein, damit die relative Restwelligkeit der geglätteten Spannung nicht größer als 5% ist?

Lösung zu Aufgabe 6.4



Erforderliche Glättungskapazität:

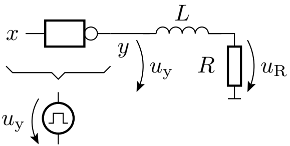
$$C \geq -\frac{t_L - t_E}{R_L \cdot \ln\left(1 - \Delta U_{a.rel}\right)}$$

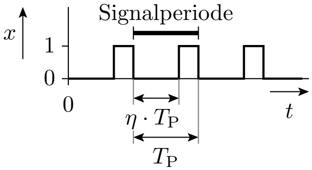
mit $\Delta U_{a.rel} \leq 5\%$, $R_L \geq \frac{12\,\mathrm{V}}{100\,\mathrm{mA}} = 120\,\Omega$ und $t_L - t_E < 20\,\mathrm{ms}$ genügt[3]:

$$C \geq -\frac{20\,\mathrm{ms}}{120\,\Omega \cdot \ln\left(95\%\right)} = 3250\,\mu\mathrm{F} \Rightarrow 4700\,\mu\mathrm{F}$$

[3] Nächster Standardwert 4700 µF

Aufgabe 6.5: PWM mit Glättungsinduktivität





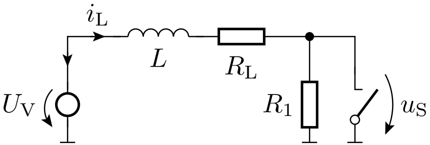
$L = 100\,\mathrm{mH}$
$R = 100\,\Omega$
$U_V = 10\,\mathrm{V}$
$\eta = 0{,}7$
$T_P = 1\,\mathrm{ms}$
$u_R(0) = 0$

Modell für den Inverter:

$$u_y = \begin{cases} U_V & x = 0 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

1. Transformation in ein geschaltetes RL-Glied mit demselben Strom durch die Induktivität.
2. Wie groß ist die Zeitkonstante τ?
3. Schätzen des Spannungsverlauf über dem Widerstand für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 4\,\mathrm{ms}$.

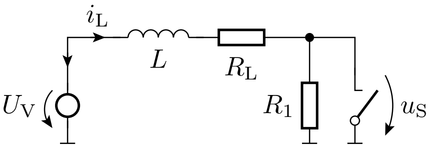
Aufgabe 6.6: Schalten induktiver Lasten



$$U_V = 10\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$$
$$R_L = 100\,\Omega$$
$$L = 100\,\mathrm{mH}$$

Wie groß ist die Spannung u_S über dem Schalter im Ausschaltmoment?

Lösung zu Aufgabe 6.6



$U_{\mathrm{V}} = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$
$R_{\mathrm{L}} = 100\,\Omega$
$L = 100\,\mathrm{mH}$

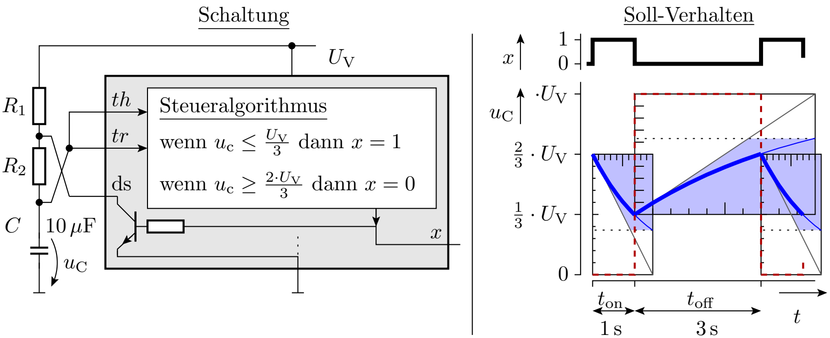
- Schalter ein:

$$I_{\mathrm{L}}^{(+)} = \frac{U_{\mathrm{v}}}{R_{\mathrm{L}}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 100\,\mathrm{mA}$$

- Schalter aus:

$$i_{\mathrm{L}}(0) = 100\,\mathrm{mA}$$
$$u_{\mathrm{R1}}(0) = R_1 \cdot i_{\mathrm{L}}(0) = 1000\,\mathrm{V}$$

Aufgabe 6.7: Oszillator mit dem NE555



Wie groß müssen R_1 und R_2 sein?

Lösung zu Aufgabe 6.7

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{C}}\left(t_{\mathrm{on}}\right)=\frac{1}{3}\cdot U_{\mathrm{V}} &= U_{\mathrm{CEX}}-\left(U_{\mathrm{CEX}}-\frac{2}{3}\cdot U_{\mathrm{V}}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t_{\mathrm{on}}}{R_2\cdot C}}\\
t_{\mathrm{on}} &= R_2\cdot C\cdot\ln\left(\frac{U_{\mathrm{CEX}}-\frac{2}{3}\cdot U_{\mathrm{V}}}{U_{\mathrm{CEX}}-\frac{1}{3}\cdot U_{\mathrm{V}}}\right)\approx R_2\cdot C\cdot\ln\left(2\right)\\
R_2 &\approx \frac{1\,\mathrm{s}}{\ln(2)\cdot 10\,\mu\mathrm{F}}=144\,\mathrm{k}\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{C}}\left(t_{\mathrm{off}}\right)=\frac{2}{3}\cdot U_{\mathrm{V}} &= U_{\mathrm{V}}-\left(U_{\mathrm{V}}-\frac{1}{3}\cdot U_{\mathrm{V}}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t_{\mathrm{off}}}{(R_1+R_2)\cdot C}}\\
t_{\mathrm{off}} &= \ldots=(R_1+R_2)\cdot C\cdot\ln\left(2\right)\\
R_1 &\approx \frac{3\,\mathrm{s}}{\ln(2)\cdot 10\,\mu\mathrm{F}}-R_2=2\cdot R_2=288\,\mathrm{k}\Omega
\end{aligned}
$$